LICENCIATURA EN ADMINISTRACIÓN

APUNTES

PARA LA ASIGNATURA

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

2005

Colaboradores

Coordinación general
L. A. C.y Mtra. Gabriela Montero Montiel

Coordinación académica

L.A.C. Francisco Hernández Mendoza

Elaboradores de contenido
Maria Reynería Pompa Osorio
Euardo Arévalo Guerrero

Coordinación operativa
L.A.C. Francisco Hernández Mendoza
L.C. Gilberto Manzano Peñaloza

Asesoría pedagógica
Sandra Rocha

Corrección de estilo
José Alfredo Escobar Mellado

Edición
L.A.C. José Mario Hernández Juárez

Captura
Beatriz Ledesma Espíndola

Prólogo

Como una labor editorial más de la Facultad de Contaduría y Administración, los materiales educativos que conforman el Paquete de Estudio Autodirigido del Sistema Universidad Abierta representan un esfuerzo encauzado a apoyar el aprendizaje de los estudiantes de este sistema.

Esperamos que estos materiales sirvan de punto de referencia tanto a los asesores como a los alumnos. A los primeros para que tengan medios que les permitan orientar de mejor manera y con mayor sencillez a sus estudiantes. Y a los segundos para que cuenten con elementos para organizar su programa de trabajo, se les facilite comprender los objetivos de cada asignatura y se sirvan de los apoyos educativos que contienen, como los esbozos de las materias y sus unidades, cuestionarios de autoevaluación, lecturas básicas de estudio, actividades de aprendizaje y apuntes elaborados por los asesores.

Así, ponemos estos materiales a disposición de nuestra comunidad, esperando que alcancen sus propósitos.

ATENTAMENTE
Ciudad Universitaria, D. F., octubre de 2005

C.P.C. Y MAESTRO ARTURO DÍAZ ALONSO

DIRECTOR

APUNTES PARA LA ASIGNATURA MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Primera edición, octubre, 2005

Facultad de Contaduría y Administración
Fondo Editorial FCA
Circuito Exterior de Ciudad Universitaria,
Deleg. Coyoacán, 04510-México, D.F.

Impreso y hecho en México

Contenido

Introducción

Desde que se inventó la moneda o el uso de la misma, el hombre ha tratado de utilizarla de la mejor manera, el dinero pasó a formar parte importante de la vida de las personas, con él podían y se puede realizar todo tipo de transacciones. El día de hoy ha adquirido una mayor importancia ya que, afortunada o desafortunadamente, todo se mueve través de ese medio, debido a ello también se ha visto la manera de utilizarlo de la mejor manera posible porque al mismo tiempo que abunda en lo general, es muy escaso en lo particular, y por lo mismo es menester el que se sepa manejar y aprovechar a su máxima utilidad. Al estar las personas relacionadas con el uso y manejo del dinero es necesario el comprender de una forma clara y sin complejidades cómo el dinero puede ganar, perder o cambiar de valor con el transcurso del tiempo, debido a la inflación; para ello debemos saber emplear en particular las matemáticas financieras. Además es trascendental su manejo ya que la economía de cualquier nación está basada en el crédito y para tomar una decisión acertada es necesario tomar en cuenta que a través del tiempo el valor del dinero puede tener variaciones.

La intención de los presentes apuntes de Matemáticas Financieras es el lograr que el estudiante conozca de una manera más cercana a los conocimientos más importantes que se ven el medio financiero y bursátil, además que se puede considerar que son la base para poder estudiar otras materias que por sus características es requisito el saber de los conceptos y procedimientos para el manejo del dinero.

Se ha tratado de exponer todas las unidades de la asignatura de una manera clara y sencilla, utilizando un lenguaje simple para que el estudiante encuentre interesante el campo de las matemáticas financieras.

A lo largo de las unidades se verán problemas prácticos, empezando por ver el Interés Simple que es la base de los siguientes temas como son el Interés Compuesto, Anualidades, Amortización y Depreciación, hasta llegar a la parte de Aplicaciones.

Es importante aclarar que las matemáticas financieras, como todas las demás matemáticas, requieren de trabajo y práctica, por ello la recomendación de realizar todos los ejercicios que contiene el cuaderno de actividades y la guía de estudio.

Estamos seguros que al final de la materia, el alumno tendrá conocimientos suficientes para poder tomar una decisión en todo lo referente al manejo del dinero.

Objetivos generales de la asignatura

Al terminar la unidad el estudiante debe diferenciar entre monto, interés, tasa de interés, tiempo y capital, así como hacer los cálculos respectivos para obtener cada concepto. Deberá utilizar las herramientas necesarias para la reestructuración de una o varias deudas, conocer como cambia el valor del dinero en el transcurso del tiempo.

Unidad 1: Interés simple

Objetivos particulares de la unidad

Al terminar la unidad el estudiante debe diferenciar entre monto, interés, tasa de interés, tiempo y capital, así como hacer los cálculos respectivos para obtener cada concepto. Deberá utilizar las herramientas necesarias para la reestructuración de una o varias deudas, conocer como cambia el valor del dinero en el transcurso del tiempo.

UNIDAD 1. INTERES SIMPLE

1.1. Concepto

El interés es la cantidad que debe pagar una persona por el uso del dinero tomado en préstamo. La cantidad del interés depende de las variables siguientes:

- Capital: cantidad que se da en préstamo.
- Plazo: tiempo durante el cual se presta el capital.
- Tasa de interés.

Fórmula general del interés

El interés es el producto que resulta de multiplicar el capital por la tasa; y multiplicándolo por la(s) unidad(es) de tiempo obtenemos el interés total que corresponde a dicha(s) unidad(es).

Para designar los diversos elementos del interés, se emplean las literales siguientes:

I = *Interés*

C = Capital, principal, valor actual o valor presente

i = Tasa de interés por unidad de tiempo

t = Tiempo o plazo

Al aplicar la definición anterior, tenemos la fórmula siguiente:

$I = Cit$ ……………………………………………..(1)[1]

NOTA: para aplicar la fórmula y resolver el problema, los datos de tiempo (*t*) y tasa de interés (*i*) deben referirse a una misma unidad de tiempo.

[1] Se enumeran las fórmulas planteadas, con el fin de identificarlas fácilmente en el documento cuando se haga referencia a ellas.

Ejemplos

Si la tasa es anual y el tiempo 5 años, $t = 5$.

Si la tasa es anual y el tiempo 7 meses, sustituimos t por 7/12.

Si la tasa es mensual y el tiempo 2 años, consideramos t por 24 meses.

En el mismo caso, si la tasa es trimestral y el tiempo 3 años, convertiremos los años a trimestres: $t = 12$.

En conclusión, siempre convertiremos las unidades de tiempo a las unidades a que hace referencia la tasa.

A continuación, se analiza la fórmula general del interés en una serie de problemas de cálculo del interés (I), capital (C), tasa de interés (i) y tiempo (t). (Es importante que realices tus propios cálculos para que compruebes cómo se llegó a los resultados).

Cálculo del interés (i)

Ejercicio 1. ¿Qué interés (I) produce un capital (C) de $40,000.00 en 1 año 7 meses y 21 días (t), al 24% anual (i)?

I = ?

C = $40,000.00

i = 24% anual = 0.24 anual

t = 1 año x 360 días = 360 días

7 meses * 30 días = 210

21 días = 21

Total de días = 591

Por tanto, t = 591/360 años

I = Cit = 40 000 x 0.24 x (591/360) = $ 15,760.00

De la fórmula de interés:

$I = Cit$ ....(1)

se extraen las que sirvan para calcular el capital (*C*), tasa de interés (*I*) y tiempo (*t*), despejando cada una de esas variables de la fórmula de interés (*I*):

$C = I / it$………..............……………………………......................……………..(2)

$i = I / Ct$…………………..…...………………………………...............................…(3)

$t = I / Ci$……......……………………………………......................…………………(4)

1.2. Monto, capital, tasa de interés y tiempo.

Cálculo del capital (*c*)

Ejercicio 2. ¿Qué capital (*C*), con tasa de interés del 12% anual (*i*), produce intereses de $15,000.00 (*I*) en 10 meses (*t*)?

C = ?

I = $15,000.00

i = 12% anual = 0.12 anual

t = 10/12 de año

C = I / it = 15000 / [0.12 x (10/12)] = $150,000.00

Cálculo de la tasa de interés (*i*)

Ejercicio 3. ¿Cuál es la tasa de interés (*i*) a la que ha estado invertido un capital de $110,000.00 (*C*) que durante dos años y 5 meses (*t*) produjo $39,875.00 de interés (*I*)?

i = ?

C = $110,000.00

I = $39,785.00

t = 2 años y 5 meses = 29 meses

i = I / Ct = 39875 / (110000 x 29) = 0.0125 = 1.25% mensual

Si el interés es de 1.25% cada mes, corresponde a 1.25 x 12: 15% anual.

NOTA: si la tasa de interés es la incógnita, la unidad de tiempo será la que se maneje en la variable tiempo.

Cálculo del tiempo (*t*)

Ejercicio 4. ¿Qué tiempo (*t*) habrá estado invertido un capital de $85,000.00 (*C*) que produjo un interés de $35,700.00 (*I*) a una tasa anual de 21% (*i*)?

t = ?

C = $85,000.00

I = $35,700.00

i = 21% anual = 0.21 anual

t = I / Ci = 35700 / (85000 x 0.21) = 2 años

NOTA: cuando se pide la tasa de interés en años, automáticamente, la tasa saldrá anualizada. Es decir, toma la unidad de tiempo que maneja la tasa de interés.

Monto de un capital utilizando interés simple

Se conoce por monto a la suma del capital (*C*) más el interés (*I*). (También se le denomina valor futuro, valor acumulado o valor nominal).

Si designamos como *M* a dicha suma, tenemos:

M = C + I……..…………………………...………………………………………………(5)

Y si la fórmula del interés (*I*):

I = Cit.................………………………………………………………………………...*(1)*

la sustituimos en la fórmula del monto (*M*) arriba anotada, tenemos que:

M = C + Cit = C (1+ it)……….………….……………………….........................…..(6)

Cálculo del monto (*M*)

Ejercicio 5. Si usamos los datos del ejercicio 1, y sabiendo de antemano que el monto (*M*) relativo es $55,760.00, comprobamos nuestra nueva fórmula:

C = $40,000.00

i = 24% anual = 0.24 anual

t = 1 año x 360 días = 360 días

*7 meses * 30 días = 210*

21 días = 21

Total de días = 591

Por tanto, *t = 591/360 años*

$$M = 40000\,[i + (0.24)\,(591/360)]$$

$$M = 40000\,(1 + 0.394)$$

$$M = 40000\,(1.394)$$

$$M = \$55{,}760$$

En función de la fórmula del monto, puede ser necesario calcular el capital, el tiempo o la tasa; en tal caso, se procederá a despejar la incógnita de la fórmula básica.

Así, para buscar el capital (*C*), tenemos:

$$C = \frac{M}{1 + i\,t} \qquad \text{...(7)}$$

Para encontrar el tiempo, tenemos:

$$\frac{M}{C} - 1 = i\,t$$

$$\frac{(M/C) - 1}{i} = t \quad \ldots\ldots(8)$$

Por último, para encontrar la tasa de interés, aplicamos la fórmula siguiente:

$$\frac{(M/C) - 1}{t} = i \quad \ldots\ldots(9)$$

A continuación –mediante ejercicios– se analizan las fórmulas anteriores. (Conviene que realices los cálculos, para que comprendas cómo se resolvieron cada una de las literales).

Cálculo del capital (*C*) utilizando monto (*M*)

Ejercicio 6. ¿Cuál es el capital (*C*) que produjo un monto (*M*) de $135,000.00, a una tasa (*i*) de 14% anual durante nueve meses?

C = ? = $122,171.94

M = $135,000.00

i = 14% = 14% anual = 0.14

t = 9 meses = 9/12 de año

$$C = \frac{13{,}5000}{1 + (0.14)\,(9/12)} = \frac{13{,}5000}{1 + 0.105} = \frac{13{,}5000}{1.105}$$

C = $122,171.94

NOTA: si en el enunciado no se especifica la unidad de tiempo a la que se establece la tasa de interés, se sobreentiende que es anual.

Cálculo del tiempo (*t*) utilizando monto (*M*)

Ejercicio 7. ¿Durante qué tiempo (*t*) un capital (*C*) de \$122,171.94, impuesto a 14% anual (*i*), se convierte en un valor futuro (*M*) de \$135,000.00?

C = \$122,171.94

M = \$135,000.00

i = 14% = 14% anual = 0.14

t = ?

$$t = \frac{135000/122171.94) - 1}{0.14} = \frac{1.105 - 1}{0.14} = \frac{0.105}{0.14}$$

*t = 0.75 años = 0.75 * 12 = 9 meses*

NOTA: observa que, como el tiempo resultó en fracción de año, se utiliza una regla de tres para obtener la unidad de tiempo preferida, que en este ejercicio es:

1 año $\longrightarrow$ 12 meses

0.75 año $\longrightarrow$?

Operación: (0.75 x12)/1 = 9 meses

Cálculo de la tasa de interés (*i*) utilizando monto (*M*)

Ejercicio 8. ¿A qué tasa de interés (*i*) habrá estado impuesto un capital (*C*) de \$122,171.94, que en 9 meses (*t*) produjo un monto (*M*) de \$135,000?

C = ? = \$122,171.94

M = \$135,000.00

i = ?

t = 9 meses = 9/12 de año

$$i = \frac{(135000/122171.94) - 1}{9/12} = \frac{1.105 - 1}{0.75} = \frac{0.105}{0.75}$$

i = 0.14 = 14% anual

1.3. Tipos de interés simple (clasificación)

Interés simple

Ocurre cuando los intereses que debe pagar el acreedor por cada lapso convenido no se incorporan al capital. Es *simple* porque el capital que lo produce siempre es el mismo.

Interés compuesto

Se da cuando el deudor no paga los intereses a su vencimiento. De este modo, se cuenta –en realidad– con un capital: al acumularse los intereses al capital, éstos producen un nuevo y mayor capital sobre el cual se acumularán los intereses por el siguiente periodo. Y aunque siempre hay una misma tasa, el capital se va incrementando sucesivamente junto con los intereses. Dicho de otro modo, el interés produce a su vez más intereses.

1.4. Descuento bancario o simple

El descuento es la disminución que se hace a una cantidad que se paga antes de su vencimiento. Es decir, es el cobro hecho con anticipación a una cantidad con vencimiento futuro; esto significa que la persona que compra el derecho de cobrar esa cantidad futura efectúa un préstamo por el cual exige un interés, ya que debe transcurrir el tiempo anticipado para recuperar su inversión. A ese interés se le llama descuento: cuando el inversionista (quien compra el documento que ampara la cantidad futura) adquiere en una cantidad menor un valor nominal que vence en el futuro. Asimismo a una cantidad que tiene un vencimiento en un plazo futuro le corresponde un valor actual. A la diferencia entre ambos se le llama descuento.

Para calcular el descuento aplicando el interés simple, se utilizan dos procedimientos: descuento comercial y descuento real o justo. Sus elementos se designan mediante las literales siguientes:

Dc	Descuento comercial.
Dr	Descuento real o justo.
M	Valor nominal o valor futuro.
d = i	Tasa de descuento o de interés que se aplica en la operación.
t	Tiempo por el cual se aplica el descuento. Es el periodo que falta para poder cobrar el valor nominal.
C	Valor descontado o valor actual.

Descuento comercial

Se calcula sobre el valor nominal. Consiste en calcular el interés entre el vencimiento de la deuda y la fecha del descuento a cierta tasa sobre el valor nominal.

Fórmula. *Si el descuento comercial es el interés del valor nominal, sustituimos en la fórmula del interés simple (*I = Cit*) los valores correspondientes, considerando que el interés se calcula sobre el valor nominal (*M*) y no sobre el valor actual (*C*):*

Dc = Mdt..*(10)*

En función de la fórmula del descuento comercial (*Dc*), puede ser necesario calcular el valor nominal (*M*), tiempo (*t*) y tasa de descuento (*d = i*), en cuyo caso se procederá a despejar la incógnita de la fórmula básica.

Así, para buscar el valor nominal (*M*), tenemos:

$$M = \frac{Dc}{d\,t} \qquad (11)$$

Y para encontrar el tiempo (*t*), tenemos:

$$t = \frac{Dc}{Md} \qquad (12)$$

Por último, para encontrar la tasa de descuento (*d = i*), tenemos:

$$d = \frac{Dc}{Mt} \qquad (13)$$

Para obtener el valor actual o valor descontado (*C*), se encuentra la diferencia entre el monto o valor nominal (*M*) menos el descuento (*Dc*):

$$C = M - Dc \qquad (14)$$

Al sustituir la fórmula del descuento comercial en la fórmula anterior, tenemos:

$$C = M - Mdt$$

Por tanto:

$$C = M(1 - dt) \qquad (15)$$

Descuento real o justo

Es la diferencia entre el valor nominal y el actual.

Fórmula

Dr = M – C……………....................……………………………………………...…….*(16)*

El descuento real o justo puede considerarse como la diferencia entre el valor nominal (*M*) y su valor actual:

$$\left(C = \frac{M}{1 + it} \right)$$

Podemos escribir la fórmula del descuento real así:

$$Dr = M - \frac{M}{1 + it} = M \left(1 - \frac{1}{1 - it} \right) \text{.............……………………….…………...(17)}$$

Asimismo, para obtener cada una de las demás literales, pueden utilizarse las fórmulas de interés simple ya vistas (6-9).

Mediante el siguiente ejercicio, comparemos ambos procedimientos:

Ejercicio 9. Se tiene un documento con valor nominal de $50,000.00 (*M*) y una tasa de descuento del 2.5% mensual (*d* = *i*):

M = $50,000.00

d = i = 4% = 0.04 mensual

Además, se cuenta con los datos de la tabla siguiente:

Tiempo	Descuento comercial	Descuento real o justo
		M *Dr = M* – ----------

	$Dc = Mdt$	$1+ it$
1 mes	1,250.00	1,219.51
2 meses	2,500.00	2,380.95
4 meses	5,000.00	4,545.45
6 meses	7,500.00	6,521.74
1 año	15,000.00	11,538.46

La tabla anterior nos revela la diferencia entre los descuentos. El descuento comercial es el interés del valor nominal (*M*), ya que calcula el descuento no sobre el capital invertido, sino sobre la suma de éste más los intereses; de lo que resulta que el descuento se calcula a una tasa mayor que la del problema, pues al disminuir al valor nominal el descuento, se obtendrá una cantidad menor al valor actual. Por tanto, el descuento se rige a una tasa mayor de la que se da en el problema.

La siguiente fórmula es aplicable en ambos tipos de descuento:

$C = M – D$...............……………………………………………………………..…..(14)

Y despejando las demás variables, tenemos:

$D = M – C$..………………………………………………………………...............(16)

$M = C + D$............……………………………………………………………………..(18)

A continuación, se analizan y comparan las fórmulas de descuento comercial (*Dc*) con las de descuento real o justo (*Dr*), mediante los ejercicios siguientes. (No olvides hacer también los cálculos para que sepas cómo fueron resueltas cada una de las literales).

Cálculo del valor descontado (*C*)

Ejercicio 10. ¿Cuál es el valor descontado (*C*) de un documento con valor nominal de \$50,000.00 (*M*) y una tasa de descuento del 2.5% mensual ($d = i$), si se descuentan 6 meses (*t*) antes de su vencimiento?

$C = ?$

$M = \$50,000.00$

$t = 6$ *meses*

$d = i = 2.5\%$ *mensual* $= 0.025$ *mensual*

Con descuento comercial (*Dc*):

$C = M – Dc$ ....(14)

Si D = \$7,500.00, obtenido de la tabla arriba indicada en el mes 6, tenemos:

C = 50000 – 7500 = \$42,500.00

O si se utiliza la fórmula:

$C = M(1 – dt)$ .... (15)

C = 50000[1 – (0.025)(6)] = \$42,500.00

Con descuento real o justo (*Dr*), tenemos:

C = M – Dr

Si $D = \$6,521.74$, obtenido de la tabla indicada en el mes 6, entonces:

C = 50000 – 6521.74 = \$43,478.60

O bien, si se aplica la fórmula:

$$C = \frac{M}{1 + i\,t} \qquad \text{...(7)}$$

$$C = \frac{50000}{1 + (0.025)(6)} = \$43,478.60$$

Cálculo del tiempo (*t*)

Ejercicio 11. Indica con qué tiempo (*t*) de anticipación se descontó un documento cuyo valor nominal es \$50,000.00 (*M*). Se recibió un valor descontado (*C*) de \$42,500.00, con descuento comercial; y \$43,478.60, con descuento real o justo. Y la tasa de descuento es de 2.5% mensual ($d = i$).

De acuerdo con el descuento comercial (*Dc*), tenemos:

$C = \$42,500.00$

$M = \$50,000.00$

$t = ?$

$d = i = 2.5\%$ mensual $= 0.025$ mensual

$Dc = 50000 – 42500 = \$7,500.00$

$$t = \frac{Dc}{Md} \qquad \text{..........(12)}$$

$$t = \frac{7500}{50000(0.025)} = 6 \text{ meses}$$

*De acuerdo con el descuento real o justo (*Dr*), tenemos:*

$C = \$43,478.60$

$M = \$50,000.00$

$t = ?$

$d = i = 2.5\%$ mensual $= 0.025$ mensual

$$t = \frac{(M/C) – 1}{} \qquad \text{..........(8)}$$

$$i$$

$$t = \frac{(50000/43478.60) - 1}{0.025} = 6 \text{ meses}$$

Cálculo de la tasa de descuento (d = i)

Ejercicio 12. ¿A qué tasa descuento (*d*) se aplicó un documento con valor nominal de \$50,000.00 (*M*), si se descontó faltando 6 meses (*t*) para su vencimiento y por el cual se obtuvo un valor descontado (*C*) de \$42,500.00, con descuento comercial; y \$43,478.60, con descuento real o justo?

Según el descuento comercial (*Dc*):

C = \$42,500.00
M = \$50,000.00
t = 6 meses
d = i = ?
Dc = 50000 – 42500 = \$7,500.00

$$d = \frac{Dc}{Mt} \qquad \text{……………………………………………………………………………(13)}$$

$$d = \frac{7500}{50000(6)} = 0.025 = 2.5\% \text{ mensual}$$

Según el descuento real o justo (*Dr*):

C = \$43,478.60
M = \$50,000.00
t = 6 meses

$d = i = ?$

$$i = \frac{(M/C) - 1}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$i = \frac{(50000/43478.60) - 1}{6} = 0.025 = 2.5\%\ mensual$$

Cálculo del valor nominal (M)

Ejercicio 13. Calcula el valor nominal (*M*) de un documento que se descontó 6 meses (*t*) antes de su vencimiento. Se aplicó una tasa de descuento del 2.5% (*d* = *i*) y se obtuvo un valor descontado (*C*) de $42,500.00, con descuento comercial; y de $43,478.60, con descuento real o justo.

Según el descuento comercial (*Dc*):

C = $42,500.00

M = ?

t = 6 meses

d = i = 2.5% mensual = 0.025 mensual

Dc = $7,500.00

$M = C + D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$

M = 42500 + 7500 = $50,000.00

Si aplicamos la fórmula:

$$M = \frac{Dc}{d\ t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$M = \frac{7500}{(0.025)(6)} = \$50{,}000.00$$

Según el descuento real o justo (Dr):

C = $43,478.60
M = $50,000.00

t = 6 meses

d = i = 2.5% mensual = 0.025 mensual

M = C + Cit = C (1+ i)………………………………………………………………………(6)

M = 43478.60[1 + (0.025)(6)] = $50,000.00

1.5. Ecuación de valor

Por diversas razones, a veces el deudor decide cambiar sus obligaciones. Para que esto sea posible, deudor y acreedor deben llegar a un acuerdo en el cual se consideren las nuevas condiciones para realizar la operación, en función de una tasa de interés y de la fecha en que se va a llevar a cabo (a esta última fecha se le conoce como fecha focal).
En la resolución de estos problemas, se utilizan gráficas (de tiempo valor) en las que se representan las fechas de vencimiento de las obligaciones originales y cuándo se realizarán los pagos (se puede utilizar tanto el interés simple como el compuesto). En este caso, se lleva a cabo el procedimiento siguiente:

a. *Etapa 1.* Calcular el monto a pagar de cada una de las obligaciones originales a su vencimiento.
b. *Etapa 2.* Hacer la gráfica de tiempo-valor que considere las fechas de vencimiento. Y se colocan, sobre la misma, los montos en la fecha de su vencimiento.

c. *Etapa 3.* Debajo de la gráfica de tiempo, se ubican los pagos parciales (como las deudas, con sus fechas respectivas).
d. *Etapa 4.* Se determina en la gráfica la fecha focal (de preferencia en donde coincida con algún pago; es recomendable que sea una incógnita, con el fin de realizar el menor número de operaciones).
e. *Etapa 5.* Se efectúa la solución; para ello, se trasladan todas las cantidades a la fecha focal (se debe tomar en cuenta que la suma de todos los pagos debe cubrir la suma de las deudas).
f. *Etapa 6.* Se resuelven las operaciones.

Ejercicio 14. Al día de hoy una persona tiene las obligaciones siguientes:

a. Un préstamo de $30,000.00, otorgado hace 6 meses, con vencimiento el día de hoy e impuesto con una tasa de 2.5% mensual.

C = $30,000.00
t = Hace 6 meses con vencimiento el día de hoy
i = 2.5% = 0.025 mensual

b. Una deuda por $15,000.00 contraída hace tres meses, con vencimiento dentro de 9 meses y con un tipo de interés de 3% mensual.
C = $5,000.00
t = Hace 3 meses con vencimiento dentro de 9 meses.
I = 3% = 0.03 mensual

c. Un compromiso por $50,000.00 contratado hace cuatro meses, con una tasa de 2% mensual y con un vencimiento dentro de 6 meses.

C = $50,000.00
t = Hace 4 meses con vencimiento dentro de 6 meses
i = 2% = 0.02 mensual

d. Una deuda por $10,000.00 contratada hace un mes, con vencimiento dentro de 7 meses y una tasa de 3.5% mensual.

C = $10,000.00

t = Hace un mes con vencimiento dentro de 7 meses

i = 3.5% = 0.035 mensual

Hoy mismo, esta persona decide renegociar sus obligaciones con un rendimiento, en las nuevas operaciones, del 30% anual mediante tres pagos:

- $40,000.00, el día de hoy.
- $35,000.00, dentro de 6 meses.
- El saldo, dentro de 12 meses.

Calcula el importe del saldo utilizando como fecha focal el mes 12.

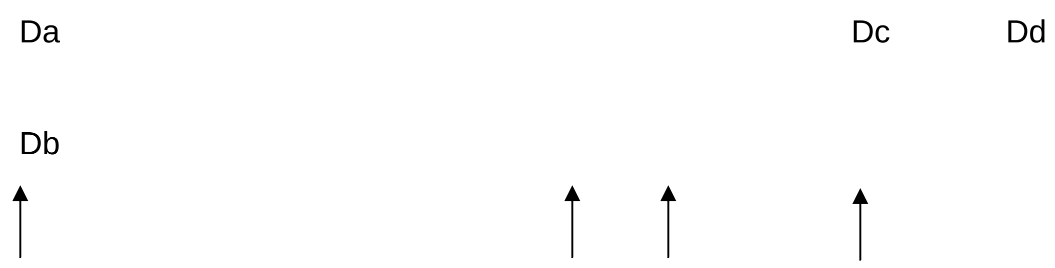
Solución con interés simple

ETAPA 1

Fórmula: $M = C(1 + it)$.................... ……………………………………………….....(6)

DEUDA (D)	OPERACIÓN $M = C(1 + it)$	MONTO DE LA DEUDA
a	30000[1 + (0.025)(6)]	$34,500.00
b	5000[1 + (0.03)(12)]	$ 6,800.00
c	50000[1 + (0.02)(10)]	$60,000.00
d	10000[1 + (0.035)(8)]	$12,800.00
	TOTAL EN VALORES ABSOLUTOS	$114,100.00

ETAPA 2



|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|

0 1 2 3 4 5 6 7 8

9 10 11 12

MESES

Da Dc Dd

Db

34500 60000 12800

6800

|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|

0 1 2 3 4 5 6 7 8

9 10 11 12

ETAPA 3

Da Dc Dd

Db

34500 60000 12800

6800

|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|

0 1 2 3 4 5 6 7 8
9 10 11 12

40000 35000

X

P1 P2

P3

ETAPA 4

Da Dc Dd
Db

34500 60000 12800

6800

|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|------***ff***

0 1 2 3 4 5 6 7 8
9 10 11 12

40000 35000

X

P1 P2

P3

ETAPA 5

Da Dc Dd
Db

34500 60000 12800
6800

|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------*ff*

0 1 2 3 4 5 6 7 8
9 10 11 12

40000 35000
X
P1 P2
P3

Suma de las deudas = Suma de los pagos

Σ DEUDAS = Σ PAGOS

NOTA: observa que todas las operaciones están avanzando en el tiempo, por tanto, se busca el monto (M). En cambio, si una cantidad regresa en el tiempo, se calcula el capital.

ETAPA 6

i = 30% = 0.025 mensual

DEUDA	OPERACIÓN	RESULTADO
a	M = 34500[1 + (0.025)(12)]	$44,850.00
b	M = 6800[1 + (0.025)(3)]	$7,310.00
c	M = 60000[1 + (0.025)(6)]	$69,000.00
d	M = 12800[1 + (0.025)(5)]	$14,400.00
	SUMA DE DEUDAS	$135,560.00

PAGO	OPERACIÓN	RESULTADO
a	M = 40000[1 + (0.025)(12)]	$52,000.00
b	M = 35000[1 + (0.025)(6)]	$40,250.00
c	X	X
	SUMA DE PAGOS	$92,250.00 + X

Σ DEUDAS = Σ PAGOS

135560 = 92250 + X

135560 – 92250 = X

43310 = X

Finalmente, el saldo se liquidará con una cantidad de $43,310.00.

Unidad 2. Interés compuesto

Objetivos particulares de la unidad

Al terminar la unidad el estudiante podrá distinguir y explicar la diferencia entre interés simple y compuesto, así como entre tasa de interés nominal y tasa de interés efectiva.

UNIDAD 2. INTERÉS COMPUESTO

2.1. Concepto

El interés compuesto tiene lugar cuando el deudor no paga –al concluir cada periodo que sirve como base para su determinación– los intereses correspondientes. Así, provoca que los mismos intereses se conviertan en un capital adicional, que a su vez producirá intereses (es decir, los intereses se capitalizan para producir más intereses).

Cuando el tiempo de la operación es superior al periodo al que se refiere la tasa, los intereses se capitalizan: nos encontramos ante un problema de interés compuesto y no de interés simple. En la práctica, en las operaciones a corto plazo, aun cuando los periodos a que se refiere la tasa sean menores al tiempo de la operación y se acuerde que los intereses sean pagaderos hasta el fin del plazo total, sin consecuencias de capitalizaciones, la inversión se hace a interés simple.

Por eso, es importante determinar los plazos en que van a vencer los intereses, para que se puedan especificar las capitalizaciones, y, en consecuencia, establecer el procedimiento para calcular los intereses (simple o compuesto).

NOTA: cuando no se indican los plazos en que se deben llevar a cabo las capitalizaciones, se da por hecho que se efectuarán de acuerdo con los periodos a los que se refiere la tasa. En caso de que la tasa no especifique su vencimiento, se entenderá que ésta es anual, y las capitalizaciones, anuales.

2.2. Monto, capital, tasa de interés y tiempo.

Para calcular el monto de un capital a interés compuesto, se determina el interés simple sobre un capital sucesivamente mayor, como resultado que en cada periodo los intereses se van sumando al capital inicial. Por ejemplo, el caso de un préstamo de

$10,000.00, a 18% anual en 6 años; para confrontar el funcionamiento respecto del interés simple, se comparan ambos tipos de interés en la siguiente tabla:

	Interés compuesto	Interés simple
Capital inicial	$ 10,000.00	$ 10,000.00
Intereses en el 1.º año	$ 1,800.00	$ 1,800.00
Monto al fin del 1.º año	$ 11,800.00	$ 11,800.00
Intereses en el 2.º año	$ 2,124.00	$ 1,800.00
Monto al fin del 2.º año	$ 13,924.00	$ 13,600.00
Intereses en el 3.º año	$ 2,506.32	$ 1,800.00
Monto al fin del 3.º año	$ 16,430.32	$ 15,400.00
Intereses en el 4.º año	$ 2,957.46	$ 1,800.00
Monto al fin del 4.º año	$ 19,387.78	$ 17,200.00
Intereses en el 5.º año	$ 3,489.80	$ 1,800.00
Monto al fin del 5.º año	$ 22,877.58	$ 19,000.00
Intereses en el 6.º año	$ 4,117.96	$ 1,800.00
Monto al fin del 6.º año	**$ 26,995.54**	**$ 20,800.00**

Como se puede ver, el monto a interés compuesto es mayor por la capitalización de los intereses en cada uno de los plazos establecidos de antemano. Si se sigue este procedimiento, podemos encontrar el monto a interés compuesto; sin embargo, cuando el tiempo de operación es demasiado largo, esta misma solución puede tener errores.

Tenemos la fórmula que nos da el monto de un capital a interés compuesto en "n" periodos:

$$M = C(1+i)^{n} \quad \text{...(19)}$$

NOTA: para estudiar el interés compuesto, se utilizan las mismas literales del interés simple. Pero cabe hacer algunas observaciones importantes:

En este caso, el tiempo se mide por periodos de capitalización (número de veces que los intereses se convierten o suman al capital en todo el plazo que dura la operación), cambiando la literal (*t*) por la variable (*n*).

Se debe tomar en cuenta, nuevamente, que tanto la variable tiempo –que de aquí en adelante se le puede llamar periodo de capitalización (*n*)– como la de tasa de interés (*i*) se manejen en la misma unidad de tiempo.

En la tasa de interés pueden aparecer las palabras *convertible*, *compuesto*, *nominal* o *capitalizable*, que se toman como sinónimos e indican el número de veces que se capitalizarán los intereses en un año (frecuencia de conversión).

Ejemplo:

El 18% convertible mensualmente indica que el 18% que está en forma anual debe ser convertido a forma mensual. Esto se realiza dividiendo el porcentaje entre 12 (número de meses del año): 0.18/12. Si es capitalizable trimestralmente, el resultado es 0.18/4, etcétera.

Para la solución del problema debemos sujetarnos a la unidad de tiempo (frecuencia de conversión) que se mencione en la tasa de interés. Si aplicamos la fórmula 20 a los datos del problema que resolvimos aritméticamente, tenemos:

Ejercicio 15. ¿Cuál es el monto (*M*) de un capital de \$10,000.00 (*C*), impuesto a interés compuesto a la tasa del 18% anual (*i*) en 6 años?

$M = C\,(1 + i)^{n}$ ……………………………………………………………………(19)

$M = ?$	$M = 10000.00\,(1 + 0.18)^{6}$
$C = 10{,}000$	
$i = 18\%$ anual $= 0.18$	
$n = 6$ años	$M = 10000.00\,(1.18)^{6}$

$M = \$343{,}597.38$

El resultado anterior es el mismo que obtuvimos aritméticamente en la tabla anterior. (Observa que la tasa no fue convertida en una unidad de tiempo menor, ya que no se indicaba en ella).

Desde este momento, siempre que se mencione la palabra interés, deberá entenderse que se hace referencia al interés compuesto.

Ejercicio 16. ¿Cuál es el monto (*M*) de un capital (*C*) de $85,000.00, impuesto a un interés compuesto a la tasa del 22% (*i*) durante 12 años (*n*)?

$M = ?$

$C = \$85{,}000.00$

$i = 22\%\ \text{anual} = 0.22$

$n = 12\ \text{años}$

$$M = 85000\,(1 + 0.22)^{12}$$

$$M = 85000\,(10.872213)$$

$$M = \$924{,}138.13$$

FÓRMULA DEL INTERÉS COMPUESTO

Cuando se necesite conocer el interés, basta con calcular el monto y de éste deducir el capital. Sin embargo, vamos a deducir la fórmula que nos proporcione directamente el interés:

$I = M - C$…………………………………………………………………………..(20)

Con base en lo anterior, al sustituir por *M* su valor, tenemos:

$$I = C\,(1 + i)^{n} - C$$

Teniendo como factor común a *C*:

$I = C\,[(1 + i)^{n} - 1]$…………………………………………………………………....(21)

Ejercicio 17. Apliquemos la fórmula anterior: ¿cuál es el interés (*I*) de un capital (*C*) de $85,000.00, impuesto a un interés compuesto a la tasa del 22% (*i*), durante 12 años (*n*)?

Tenemos:

$I = ?$ $\qquad I = 85000\ [(1 + 0.22)^{12} - 1]$

$C = \$85,000.00$

$i = 22\%\ \text{anual} = 0.22$ $\qquad I = 85000\ (9.872213)$

$n = 12\ \text{años}$

$$I = \$839,138.13$$

A continuación, comprobemos el resultado anterior:

Monto según el ejercicio 16	924,138.13
Menos capital propuesto	85,000.00
Interés según resolución anterior	839,138.13
	==========

CÁLCULO DEL CAPITAL EN FUNCIÓN DE LA FÓRMULA DEL MONTO

Nos basamos en la fórmula del monto al interés compuesto:

$$M = C(1 + i)^{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Luego, despejamos la variable *C*:

$$C = \frac{M}{(1 + i)^{n}} = M\,(1 + i)^{-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

$$(1 + i)^{n}$$

Comprobemos la fórmula anterior sirviéndonos de los datos del ejercicio 17.

Ejercicio 18. ¿Cuál es el capital (*C*) de un valor acumulado de $924,138.13 (*M*), invertido durante 12 años (*n*) al 22% anual (*i*)?

M = $924,138.13

C = ?

i = 22% anual = 0.22 anual

n = 12 años

$$C = \frac{924138.13}{(1 + 0.22)^{12}} = \$85,000.00$$

Ejercicio 19. ¿Qué capital (*C*) produce un monto de $379,899.89 (*M*) a los 6 años (*n*), si la tasa es del 3.5% trimestral (*i*)?

M = $379,899.89

C = ?

i = 0.035 trimestral

n = 6 años = 24 trimestres

$$C = 379899.89\,(1 + 0.035)^{-24}$$

$$C = 379899.89\,(0.437957)$$

$$C = \$166,379.86$$

CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS Y DE TIEMPO

Cálculo del tiempo en función de la fórmula del monto

Despejemos *n* de la fórmula del monto:

$$M = C\,(1+i)^n \longrightarrow M/C = (1+i)^n \longrightarrow \log M/C = n * \log (1+i)$$

$$\frac{\log M/C}{\log (1+i)} = n \qquad \text{..(23)}$$

En los ejercicios siguientes, comprobaremos la fórmula anterior.

Ejercicio 20. ¿Dentro de cuánto tiempo (*n*), un capital de \$25,600.00 (*C*) a la tasa del 2.5% trimestral (*i*) valdrá \$31,970.89 (M)?

M = \$31,970.89

C = \$25,600

i = 0.025 trimestral

n =? trimestres

$$n = \frac{\log (31970.89/25600)}{\log (1.025)}$$

$$n = \frac{0.096515}{0.010724} = 9 \text{ trimestres}$$

Ejercicio 21. ¿Dentro de cuánto tiempo (*n*) una persona que invirtió \$115,000.00 (*C*) obtendrá \$139,179.87, como monto (*M*) a la tasa (*i*) del 1.75% bimestral?

M = \$139,179.87

C = \$115,000.00

i = 1.75% bimestral = 0.0175 bimestral

n = ? Semestres

$$n = \frac{\log (139179.87/115000)}{\log (1 + 0.0175)}$$

$$n = \frac{0.082879}{0.007534} = 11 \text{ bimestres}$$

Cálculo de la tasa en función de la fórmula del monto:

En este caso, partimos de la fórmula del monto:

$M = C\,(1 + i)^n$……………………………………………………………………..(19)

$M/C = (1 + i)^n \longrightarrow (M/C)^{1/n} = 1 + i$

$(M/C)^{1/n} - 1 = i$…………………………………………………………………..(24)

Comprobemos la fórmula anterior sirviéndonos en los ejercicios siguientes:

Ejercicio 22. Un capital de \$18,000.00 (*C*) ha estado invertido durante 3 años (*n*), luego de los cuales dio un monto de \$26,000.00 (*M*), ¿a qué tasa (*i*) se celebró la operación?

$M = \$26,000.00$

C = \$18,000.00

$i = ?$ *anual*

$n = 3$ *años*

$i = (26000 / 18000)^{1/3} - 1$

$i = 1.130404 - 1$

$i = 0.130404 = 13.0404\%$ *anual*

Ejercicio 23. Con un capital de \$9,500.00 (*C*) se formó un monto de \$13,290.00 (*M*) a los 2 años (*n*), ¿a qué tasa (*i*) se hizo la inversión?

$M = \$13,290.00$

$C = \$\ 9,500.00$

$n = 2$ *años*

$i = ?$ *anual*

$i = (13290 / 9500)^{1/10} - 1$

$i = 1.398947 - 1$

$i = 0.398947 = 39.8947\%$ *anual*

Cálculo del capital en función del interés

De la fórmula del interés (*I*):

$$I = C\,[(1 + i)^{n} - 1] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

despejamos *C*:

$$C = \frac{I}{(1 + i)^{n} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Comprobemos la fórmula anterior en los ejercicios siguientes.

Ejercicio 24. ¿Qué capital (*C*) producirá un interés compuesto de $139,940.56 (*I*) a los 4 años (*n*) y a la tasa del 2% bimestral (*i*)?

I = $139,940.56
C =?
i = 2% bimestral = 0.02 bimestral
n = 4 años = 24 bimestres

$$C = \frac{139940.56}{(1 + 0.02)^{24} - 1} = \frac{139940.56}{(1.02)^{24} - 1} = \$230{,}000.00$$

Cálculo del tiempo en función de la fórmula del interés

De la fórmula del interés (*I*):

n

$$I = C\,[\,(1 + i)^n - 1]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

despejamos *n*:

$$\frac{I}{C} = (1 + i)^n - 1 \longrightarrow \frac{I}{C} + 1 = (1 + i)^n$$

$$\longrightarrow \log (I/C + 1) = n \log (1 + i)$$

Por tanto:

$$\frac{\log (I/C + 1)}{\log (1 + i)} = n\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

Comprobemos la fórmula anterior en los ejercicios siguientes.

Ejercicio 25. ¿En cuánto tiempo (*n*) un capital de $78,000.00 (*C*) produce intereses de $26,901.33, con una tasa de interés del 2.5% trimestral (*i*)?

I = $26,901.33

C = $78,000.00

i = 2.5% trimestral = 0.025 trimestral

n = ?

$$n = \frac{\log [(26901.33/78000) + 1]}{\log\ (1 + 0.025)} = \frac{0.128686}{0.010724} = 12 \text{ trimestres} = 3 \text{ años}$$

Cálculo de la tasa en función de la fórmula de interés

De la fórmula de interés (*I*):

$$I = C\,[\,(1 + i)^{n} - 1\,] \qquad (21)$$

despejamos *i*:

$$\frac{I}{C} = (1 + i)^{n} - 1 \longrightarrow \frac{I}{C} + 1 = (1 + i)^{n}$$

$$\longrightarrow \left(I/C + 1\right)^{1/n} = 1 + i$$

Por tanto:

$$(I/C + 1)^{1/n} - 1 = i \qquad (27)$$

Comprobemos la fórmula anterior en el ejercicio siguiente:

Ejercicio 26. ¿A qué tasa de interés cuatrimestral se invirtió (*i*) un capital de $97,000.00 (*C*), que produjo intereses de $41,298.81 (*I*) en un lapso de cuatro años (*n*)?

I = $41,298.81

C = $97,000.00

n = 4 años = 12 cuatrimestres

i = ?

$$i = [(41298.81/97000) + 1]^{1/12} - 1 = 0.03 = 3\% \text{ cuatrimestral}$$

2.3. Tasa nominal, tasa efectiva y tasas equivalentes.

En el interés simple, la tasa del 12% anual es proporcional al 6% semestral, al 3% trimestral y al 1% mensual. Además de la proporcionalidad de las tasas anteriores –ya que en ellas existe la misma relación entre sus valores y los periodos a que se refieren–, son a su vez equivalentes: a pesar de referirse a distintos periodos en igual tiempo, producen un mismo monto. Así, vemos que $100,000.00 al 12% en un año generan un monto de $112,000.00. Y si invertimos el mismo capital al 6% semestral en 2 semestres, formará exactamente el mismo monto:

Capital	$100,000.00
Intereses en el 1er. semestre	6,000.00
Intereses en el 2o. semestre	6,000.00

Monto en 2 semestres	$112,000.00
	==========

Por tanto, $100,000.00 al 1% mensual en 12 meses llegará a convertirse en el mismo monto anterior.

En conclusión: a interés simple, las tasas proporcionales son también equivalentes; pero no en el interés compuesto, debido a la capitalización de los intereses.

Lo anterior se puede corroborar mediante los cálculos siguientes:

Préstamo de $100,000.00 a las tasas capitalizables que se mencionan:

	12 % anual	6% semestral	3% trimestral	1% mensual
Capital	100,000	100,000	100,000	100,000

Interés del periodo	12,000	6,000	3,000	1,000
Monto	112,000	106,000	103,000	101,000
Interés del periodo		6,360	3,090	1,010
Monto		112,360	106,090	102,010
Interés del periodo			3,182.70	1,020.1
Monto			109,272.70	103,030.1
Interés del periodo			3,278.18	1,030.30
Monto			112,550.88	104,060.40
Interés del periodo				1,040.60
Suma				105,101.00
Interés 6.º periodo				1,051.01
Suma				106,152.01
Interés 7.º periodo				1,061.52
Suma				107,213.53
Interés 8.º periodo				1,072.14
Suma				108,285.67
Interés 9.º periodo				1,082.85
Suma				109,368.52
Interés 10.º periodo				1,093.69
Suma				110,462.21
Interés 11.º periodo				1,104.62
Suma				111,566.83
Interés 12º periodo				1,115.67
Monto				112,682.50
TOTAL	112,000	112,360	112,550.88	112,682.50

Si a cada uno de los totales le restamos lo invertido al inicio (el capital), tenemos:

M – C	12,000	12,360	12,550.88	12,682.50

Y si este interés lo dividimos entre lo que se invirtió (C = $100,000.00), nos da:

I / C	0.12 = 12%	0.1236 = 12.36%	0.1255088 = 12.55088%	0.126825 = 12.6825%

Lo anterior demuestra que la tasa efectiva equivalente a una tasa del 12% anual capitalizable semestralmente es de 12.36%. Asimismo, la tasa efectiva equivalente al 12% anual capitalizable por trimestre es 12.55088%. De la misma manera, la tasa del 12% anual capitalizable por mes es equivalente al 12.6825% efectivo.

En conclusión, la tasa efectiva se puede obtener dividiendo el interés generado entre el capital inicial.

FÓRMULAS DE LAS TASAS EQUIVALENTES

En las fórmulas, tenemos las equivalencias siguientes:

e = Tasa real o efectiva anual.
J = Tasa nominal anual.
m = Número de capitalizaciones por año (frecuencia de conversión de "j")
i = Tasa nominal anual.
p = Número de capitalizaciones por año (frecuencia de conversión de "i")

De tasa nominal a tasa nominal

Cuando busquemos una tasa nominal (*j*) con frecuencia de conversión (*m*), y se conoce otra tasa nominal (*i*) con frecuencia de conversión (*p*), tenemos:

$$J = [(1 + i/p)^{p/m} - 1]m \text{………..………...…………………………………………………}(28)$$

Ejercicio 27. ¿Cuál es la tasa nominal (*J*) convertible mensualmente (*m*), equivalente al 18% (*i*) convertible semestralmente (*p*)?

$J = ?$

$m = 12$

$i = 18\% = 0.18$

$p = 2$

$$J = [(1 + 0.18/2)^{2/12} - 1]12 = 0.173599 = 17.3599\% \text{ convertible mensualmente.}$$

Lo anterior significa que la tasa del 17.3599% convertible mensualmente equivale al 18% convertible semestralmente.

De tasa efectiva a tasa nominal

Cuando busquemos una tasa nominal (*j*) con frecuencia de conversión (*m*), y se conoce una tasa efectiva (*e*), tenemos:

$$J = [(1 + e)^{1/m} - 1]m \text{ ……….……………………………………………………...............}(29)$$

Ejercicio 28. ¿Cuál es la tasa nominal (*J*) convertible mensualmente (*m*), equivalente al 18.81% efectivo (*e*)?

$J = ?$

$m = 12$

$e = 18.81\% = 0.1881$

$1/12$

J = [(1 + 0.1881) – 1]12 = 0.173599 = 17.3599% convertible mensualmente

Lo anterior significa que la tasa del 17.3599% convertible mensualmente equivale al 18.81% efectivo.

De tasa nominal a tasa efectiva

Cuando busquemos una tasa efectiva (*e*), y se conoce una tasa nominal (*J*) con frecuencia de conversión (*m*), tenemos:

$e = (1 + J/m)^{m} – 1$……………………………………………………………………(30)

Apliquemos la fórmula anterior a un caso práctico:

Ejercicio 29. ¿Cuál es la tasa efectiva (*e*) equivalente al 18% (*J*), convertible semestralmente (*m*)?

$e = ?$

$J = 18\% = 0.18$

$m = 2$

$e = (1 + 0.18/2)^{2} – 1 = 0.1881 = 18.81\%$ *efectivo*

Esto quiere decir que la tasa del 18% convertible semestralmente equivale al 18.81% efectivo.

A continuación, comprobemos que las tres tasas son equivalentes. Para ello, utilizaremos el mismo ejercicio para las tres tasas:

Ejercicio 30. Cuál es el monto de $10,000.00 depositados durante un año si se tienen tres opciones: 1. a una tasa del 18% convertible semestralmente; 2. a una tasa del 17.3599% convertible mensualmente; 3. a una tasa del 18.81% efectivo.

1

M = ?

C = $10,000.00

n = 1 año = 2 semestres

i = 18% convertible semestralmente = 0.18/2 = 0.09 semestral

$M = C(1+i)^{n}$ ……………………………………………………………………………….(19)

$M = 10000(1+0.09)^{2} = \$11,881.00$

2

M = ?

C = $10,000.00

n = 1 año = 12 meses

i = 17.3599% convertible mensualmente = 0.173599/12 = 0.014467 mensual

$M = C(1+i)^{n}$ ……………………………………………………………………………….(19)

$M = 10000(1+0.014467)^{12} = \$11,881.00$

3

M = ?

C = $10,000.00

n = 1 año

i = 18.81% efectivo = 0.1881

n

M = C (1 + i)……….….....…………………………………………....................….…..(19)

1

M = 10000 (1 + 0.1881) = $11,881.0

2.4. Ecuación de valor

Por diversas causas, a veces el deudor decide cambiar sus obligaciones actuales por otras. Para realizar lo anterior, deudor y acreedor deben llegar a un acuerdo en el cual consideren las condiciones para llevar a cabo la nueva operación, en función de una tasa de interés y de la fecha cuando se va a llevar a cabo (fecha focal).

Para resolver estos problemas, se utilizan gráficas (de tiempo valor) en las que se representan las fechas de vencimiento de las obligaciones originales y de pagos, respectivamente. (Se puede utilizar tanto el interés simple como el compuesto).

Para resolver estos problemas, se efectúa el procedimiento siguiente:

a. *Etapa 1.* Calcular el monto a pagar de cada una de las obligaciones originales a su vencimiento.
b. *Etapa 2.* Hacer la gráfica de tiempo-valor que considere las fechas de vencimiento. Sobre la misma, se colocan los montos en el momento de su vencimiento.
c. *Etapa 3.* Debajo de la gráfica de tiempo, se colocan los pagos parciales, al igual que las deudas, con sus fechas respectivas.
d. *Etapa 4.* Se determina en la gráfica la fecha focal (de preferencia en donde coincida con algún pago; es recomendable que sea una incógnita, con el fin de realizar el menor número de operaciones).
e. *Etapa 5*. Se realiza la solución. Para ello, se trasladan todas las cantidades a la fecha focal (se debe tomar en cuenta que la suma de todos los pagos debe cubrir la suma de las deudas).
f. *Etapa 6*. Se resuelven las operaciones.

Ejercicio 31. El día de hoy una persona tiene las obligaciones siguientes:

a. Un préstamo de $30,000.00, otorgado hace 6 meses, con vencimiento el día de hoy, e impuesto con una tasa del 30% convertible mensualmente.

C = $30,000.00

t = Hace 6 meses con vencimiento el día de hoy

i = 30% convertible mensualmente = 0.30/ 12 = 0.025 mensual

b. Una segunda deuda por $15,000.00 contraída hace tres meses, con vencimiento dentro de 9 meses y un tipo de interés del 36% capitalizable mensualmente.

C = $5,000.00

t = Hace 3 meses con vencimiento dentro de 9 meses.

I = 36% capitalizable mensualmente = 0.36/12 = 0.03 mensual

c. Un tercer compromiso por $50,000.00 contratado hace cuatro meses, con una tasa del 24% nominal mensual y con un vencimiento dentro de 6 meses.

C = $50,000.00

t = Hace 4 meses con vencimiento dentro de 6 meses

i = 24% nominal mensual = 0.24/12 = 0.02 mensual

d. Una cuarta deuda por $10,000.00 contratada hace un mes, con vencimiento dentro de 7 meses y una tasa del 42% compuesto mensual.

C = $10,000.00

t = Hace un mes con vencimiento dentro de 7 meses

i = 42% compuesto mensual = 0.42/12 = 0.035 mensual

Hoy mismo, decide renegociar sus obligaciones con un rendimiento, en las nuevas operaciones, del 30% anual convertible mensualmente mediante 3 pagos:

- $40,000.00, el día de hoy.
- $35,000.00, dentro de 6 meses.
- El saldo, dentro de 12 meses.

Calcula el importe del saldo utilizando como fecha focal el mes 12.

Solución con interés compuesto

Etapa 1

Fórmula:

$$M = C\,(1 + i)^{n} \qquad (19)$$

DEUDA (D)	OPERACIÓN $M = C\,(1 + i)^{n}$	MONTO DE LA DEUDA
Da	$30000(1 + 0.025)^{6}$	$34,790.80
Db	$5000(1 + 0.03)^{12}$	$7,128.80
Dc	$50000(1 + 0.02)^{10}$	$60,949.72
Dd	$10000(1 + 0.035)^{8}$	$13,168.09
	TOTAL EN VALORES ABSOLUTOS	$116,037.41

Etapa 2

Da Dc Dd

Db

|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|

0 1 2 3 4 5 6 7 8

9 10 11 12

MESES

Da **Dc** **Dd**

Db

34790.80 60949.72 13168.09

7128.80

|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|

0 1 2 3 4 5 6 7 8

9 10 11 12

Etapa 3

Da
Db

Dc **Dd**

34790.80

7128.80

60949.72 13168.09

|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|

0 1 2 3 4 5 6 7 8

9 10 11 12

40000

X

P1

P3

35000

P2

Etapa 4

Da Dc Dd

Db

34790.80 60949.72 13168.09

7128.80

|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|------*ff*

0 1 2 3 4 5 6 7 8

9 10 11 12

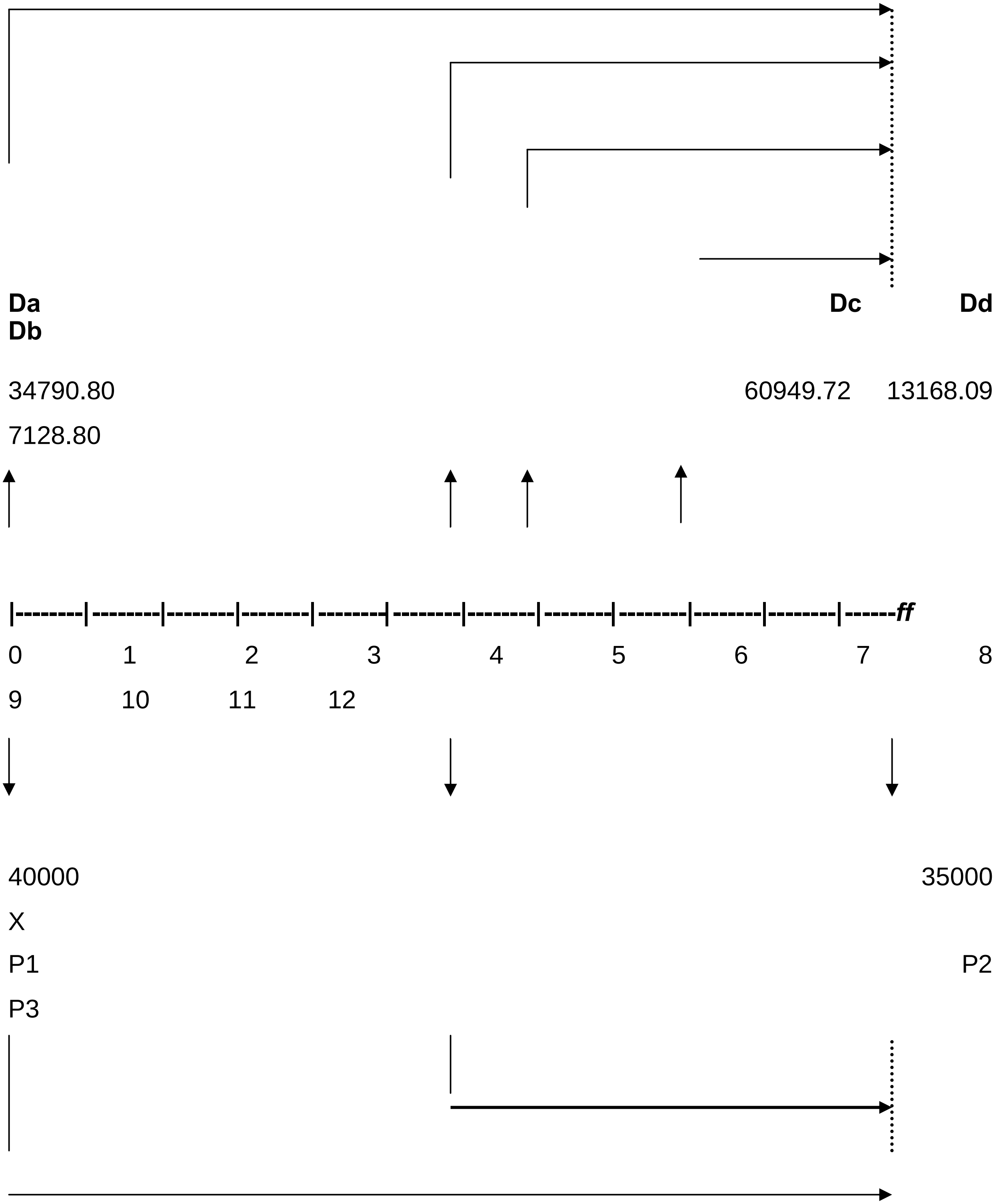
40000 35000

X

P1 P2

P3

Etapa 5


Da
Db
Dc
Dd
34790.80
7128.80
60949.72
13168.09
ff
0 1 2 3 4 5 6 7 8
9 10 11 12
40000
X
P1
P3
35000
P2

Suma de las deudas = Suma de los pagos

Σ DEUDAS = Σ PAGOS

NOTA: observa que todas las operaciones están avanzando en el tiempo, por tanto, se buscará el monto (*M*). En cambio, si una cantidad regresa en el tiempo, se buscará el capital (*C*).

Etapa 6

i = 30% = 0.025 mensual

DEUDA	OPERACIÓN	RESULTADO
a	$M = 34790.80(1 + 0.025)^{12}$	\$ 46,789.76
b	$M = 7128.80(1 + 0.025)^{3}$	\$ 7,676.94
c	$M = 60949.72(1 + 0.025)^{6}$	\$ 70,682.99
d	$M = 13168.09(1 + 0.025)^{5}$	\$ 14,898.49
	SUMA DE DEUDAS	\$140,048.18

PAGO	OPERACIÓN	RESULTADO
a	$M = 40000(1 + 0.025)^{12}$	\$53,795.55
b	$M = 35000(1 + 0.025)^{6}$	\$40,589.27
c	X	X
	SUMA DE PAGOS	\$94,384.82 + X

Σ DEUDAS = Σ PAGOS

140048.18 = 94384.82 + X

140048.18 – 94384.82 = X

45663.36 = X

Entonces, el saldo se liquidaría con una cantidad igual a $ 45,663.36.

NOTA: en el interés compuesto, no importa la fecha focal que se elija para obtener el resultado, será siempre el mismo. Pero en el interés simple, hay una variación.

Unidad 3. Anualidades

Objetivos particulares de la unidad

Al terminar la unidad el estudiante conocerá y podrá emplear los diferentes tipos de anualidades en la solución de problemas.

Sabrá diferenciar entre una anualidad anticipada, vencida y diferida.

UNIDAD 3. ANUALIDADES

3.1. Conceptos

Anualidad. Conjunto de pagos realizados a intervalos iguales de tiempo; es decir, todo pago con un importe constante, hecho en intervalos regulares, aun por periodos menores a un año.

Intervalo o periodo de pago. Tiempo que transcurre entre un pago y otro.

Plazo de una anualidad. Tiempo que pasa entre el inicio del primer periodo de pago y el final del último.

Renta (R). Pago periódico.

CLASIFICACIÓN DE LAS ANUALIDADES

Por su tiempo

a. *Ciertas.* Aquellas cuya percepción o pago se estipula en términos precisos; sus fechas son fijas y se establecen de antemano.
b. *Contingentes o eventuales.* Aquellas donde el principio de la percepción, o fin de la serie de pagos, es impreciso y depende de un acontecimiento fortuito. En otras palabras, la fecha del primer pago o del último, o ambas; no se acuerdan de antemano.

POR EL VENCIMIENTO DE SUS PAGOS

a. *Vencidas u ordinarias.* Aquellas en que cada uno de los pagos se hace al final de cada periodo durante el tiempo total del plazo del problema.
b. *Anticipadas.* Aquellas que se pagan al principio de cada periodo, durante el tiempo de percepción.

Por su iniciación

a. *Inmediatas.* Las encontramos cuando la realización de los cobros o pagos se hace en el periodo inmediatamente siguiente a la formalización del acuerdo.
b. *Diferidas.* Aquellas en donde el principio de la serie de pagos se difiere; es decir, cuando la primera anualidad vence después del transcurso de uno o varios periodos, lo que hace que ese lapso sea mayor al intervalo que separa a cada anualidad.

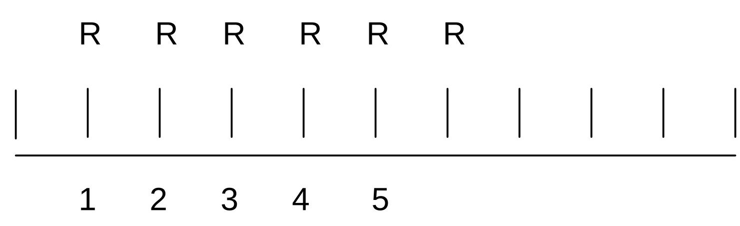
Por sus intereses

a. *Simples.* Aquellas en las que el periodo de pago coincide con el de capitalización de los intereses.
b. *Generales.* Aquellas en que no coinciden periodo de capitalización y de pago.

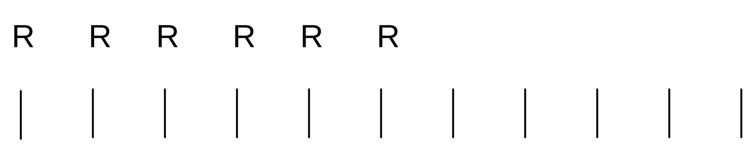
Considerando que las anualidades pueden ser simples o generales, éstas, a su vez, pueden clasificarse en ciertas y eventuales.

Ciertas

a. Vencidas



b. Anticipadas



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

c. Vencidas y diferidas

				R	R	R	R	R	R
x	x	x	x	1	2	3	4	5	6

d. Anticipadas y diferidas

			R	R	R	R	R	R	
x	x	x	x	1	2	3	4	5	6

Las anualidades eventuales o contingentes contienen los mismos grupos que las anualidades ciertas.

Finalmente, para estudiar las anualidades, y tomando en cuenta su clasificación, en cada caso, se deberán resolver los problemas siguientes:

a. Determinar el monto (*M*) o valor actual (*C*) de una serie de anualidades.
b. Establecer el valor de la anualidad (renta = *R*) en la etapa del monto o del valor actual.
c. Precisar la tasa (*i*) en función del monto o del valor actual.
d. Determinar el tiempo (*n*) en los problemas de monto y de valor actual (más el tiempo diferido, cuando se trate de esta clase de anualidades).

Es muy importante señalar que –lo mismo que en el interés compuesto, en donde las variables *n* (números de pagos) e *i* (tasa de interés), se expresan en la misma medida de tiempo– en las anualidades se agrega una variable, la renta (*R*), que debe estar en la misma medida de tiempo.

3.2. Anualidades vencidas

3.2.1. Monto de una anualidad ordinaria

El monto de las anualidades ordinarias o vencidas es la suma de los montos de todas y cada una de las rentas que se realizan hasta el momento de hacer la última de las mismas.

Ejercicio 32. Una persona decide depositar $5,000.00 al fin de cada mes, en una institución financiera que le abonará intereses del 12% convertible mensualmente: el 1% mensual, durante 6 meses. Se pide calcular y conocer el monto que se llegue a acumular al final del plazo indicado.

CONCEPTO	CANTIDAD
Depósito al final del primer mes	$5,000.00
Intereses por el segundo mes (5000 x 0.01)	50.00
Suma	5,050.00
Depósito al final del segundo mes	5,000.00
Monto al final del segundo mes	10,050.00
Intereses por el tercer mes (10050 x 0.01)	100.50
Depósito al final del tercer mes	5,000.00
Monto al final del tercer mes	15,150.50
Intereses por el cuarto mes (15150.50 x 0.01)	151.51
Depósito al final del cuarto mes	5,000.00
Monto al final del cuarto mes	20,302.01
Intereses por el quinto mes (20302.01 x 0.01)	203.02
Depósito al final del quinto mes	5,000.00
Monto al final del quinto mes	25,505.03

Intereses por el sexto mes (25505.03 x 0.01)	255.05
Depósito al final del sexto mes	5,000.00
Monto final (al término del sexto mes)	$30,760.08

Ahora bien, si el monto total es igual a la suma de los montos de cada anualidad, llegaremos al mismo resultado:

5 Monto de la primera renta: 5,000 (1.01)	$5,255.05
4 Monto de la primera renta: 5,000 (1.01)	$5,203.02
3 Monto de la tercera renta: 5,000 (1.01)	$5,151.51
2 Monto de la tercera renta: 5,000 (1.01)	$5,100.50
Monto de la quinta renta: 5,000 (1.01)	$5,050.00
Sexta renta	$5,000.00
Monto	$30,760.08

CÁLCULO DEL MONTO

Cuando el tiempo no es de consideración, el cálculo del monto puede hacerse conforme a cualquiera de los procedimientos descritos. Pero cuando no hay esa condición (o bien, cuando se quiere calcular la renta, tasa o tiempo; o en su caso, resolver el problema con mayor facilidad y rapidez), es necesario deducir y utilizar la fórmula del monto.

Sabiendo que el monto de una serie de anualidades es igual a la suma del monto de cada una de ellas, se utiliza esta fórmula:

$$M = R \left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

Y si aplicamos la fórmula anterior a los datos del problema anterior, tenemos:

$$M = 5000 \left[\frac{(1 + 0.01)^{6} - 1}{0.01} \right] = \$\ 30{,}760.08$$

3.2.1.1. Cálculo de la renta

Si partimos de la fórmula del monto de una anualidad ordinaria:

$$M = R\ \frac{(1+i)^{n} - 1}{i} \qquad \text{Pasamos } R \text{ al 1er. miembro:} \qquad \frac{M}{R} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

De donde:

$$\frac{R}{\mathbf{M}} = \frac{i}{(1+i)^{\mathbf{n}} - 1}$$

Finalmente:

$$M * i$$

$$R = \frac{}{(1 + i)^{n} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(32)$$

Ejercicio 33. ¿Cuál es la renta mensual que se requiere para obtener $30,760.08 durante 6 meses si se invierte con el 12% capitalizable mensualmente?

Seguimos con los datos de nuestro ejemplo:

M = $30,760.08

i = 12% capitalizable mensualmente = 0.12/12 = 0.01

n = 6 meses

R = ? mensual

$$R = \frac{30760.08 * 0.01}{(1 + 0.01)^{6} - 1}$$

R = $ 5,000.00 mensuales

3.2.1.2. Cálculo del tiempo plazo

Nuevamente, partimos de la fórmula del monto de anualidades ordinarias:

$$M = R\,\frac{(1 + i)^{n} - 1}{i}$$

Pasando *R* e *i* al 1er. miembro*:*

$$\frac{Mi}{R} = (1 + i)^{n} - 1$$

Pasamos ahora el –1
al 1er. miembro:

$$\frac{Mi}{R} + 1 = (1 + i)^{n}$$

Entonces: $$n \log(1+i) = \log \frac{Mi}{R} + 1$$

Y queda:

$$n = \frac{\log\left(\dfrac{Mi}{R} + 1\right)}{\log(1+i)} \quad \text{...(33)}$$

Apliquemos la fórmula anterior en el ejercicio siguiente.

Ejercicio 34. ¿Cuántos pagos deben realizarse para llegar a acumular $30,760.08 si se depositan $5,000.00 mensuales, con una tasa de interés del 12% compuesto mensual?

M = $30,760.08

R = $5,000.00 mensuales

i = 12% compuesto mensual = 0.12/12 = 0.01 mensual

n = ? meses

$$n = \frac{\log\left(\dfrac{30760.08 * 0.01}{5000} + 1\right)}{\log(1+0.01)} = 6 \text{ mensualidades}$$

3.2.1.3. Cálculo de la tasa

Considerando que el monto de anualidades ordinarias se determina de la manera siguiente:

$$M = R \, \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \qquad \text{Pasando } R \text{ al 1er. miembro:} \qquad \frac{M}{R} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

y si tratáramos de despejar *i*, nuestra ecuación contendría la incógnita en ambos miembros, lo que carece de propósito. En estas condiciones, se deja la fórmula en la última exposición anotada. El primer miembro tendrá un factor –el cociente de dividir el monto (*M*) entre la renta (*R*)– que debe ser igual al factor resultante del segundo miembro de la ecuación. El primer miembro de la ecuación se refiere a valores conocidos, pero en el segundo miembro se ha de buscar una tasa que, al sustituirla en el mismo, nos proporcione un factor igual al del primer miembro de la ecuación. En caso de encontrar exactamente el factor, la tasa es la que encierra el mismo; de lo contrario, procedemos a hacer la interpolación.

En el procedimiento de interpolación, se hace lo siguiente:

a. Probar valores en la expresión donde se localiza la tasa de interés (*i*), es decir, el segundo miembro de la ecuación, hasta encontrar dos factores de la misma que estén cercanos al factor del primer miembro de la ecuación, uno mayor y otro menor.
b. Después de haber encontrado los dos factores, se hace la interpolación.

Para una mejor comprensión, se muestra en un diagrama lo que se quiere encontrar:

Factor de tasa mayor	Factor de tasa buscada	Factor de tasa menor

|______________________________|______________________________|

Tasa mayor   Tasa ? buscada   Tasa menor

La interpolación se calcula de la manera siguiente:

a. Se obtiene la distancia del factor de la tasa buscada menos el factor de la tasa mayor.
b. Se determina la distancia total del factor de la tasa menor menos el factor de la tasa mayor.
c. Se divide la distancia del punto (a) entre la distancia total del punto (b).
d. El resultado representa la proporción que guarda el numerador respecto del denominador.
e. Se repiten los pasos a, b y c, aplicándolos a las tasas, de lo que resulta la proporción entre las mismas.
f. La tasa que se busca se encontrará igualando el porcentaje del paso (d) con la razón del paso (e).
g. La tasa se determinará despejando la incógnita, que será la tasa buscada, la cual nos dará una mejor aproximación al factor del segundo miembro de la ecuación.

Este procedimiento se resume en la siguiente fórmula:

$$\frac{\textit{Factor de la tasa buscada} - \textit{Factor de la tasa mayor}}{\textit{Factor de la tasa menor} - \textit{Factor de la tasa mayor}} = \frac{\textit{Tasa buscada} - \textit{Tasa mayor}}{\textit{Tasa menor} - \textit{Tasa mayor}}$$

O bien:

$$\frac{Ftx - FtM}{Ftm - FtM} = \frac{tx - tM}{tm - tM} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(34)}$$

Donde:

F = Factor

t = tasa

M = mayor

m = menor

Apliquemos este cálculo en el ejercicio siguiente.

Ejercicio 35. ¿A qué tasa (*i*) se aplicó una serie de 6 pagos mensuales (*n*) de \$5,000.00 (*R*) cada uno, para acumular, al final de los mismos, \$30,760.08 (*M*)?

M = \$30,760.08

n = 6 meses

R = \$ 5,000.00 mensuales

i = ? mensual

Nuestra ecuación:

$$\frac{M}{\mathbf{R}} = \frac{(1 + i)^n - 1}{\mathbf{i}}$$

$$30760.08 \qquad (1 + i)^6 - 1 \qquad\qquad (1 + i)^6 - 1$$

Queda: --------------- = ----------------- → *6.152016* = ---------------

5000 *i* *i*

Considerando que en nuestro problema hay una tasa exacta (0.01), en el ejemplo, consideraremos una tasa mayor y una menor a la tasa del ejercicio.

Factor objetivo del primer miembro = 6.152016

Luego, probamos las tasas:

TASA	OPERACIÓN	FACTOR
0.005	$\frac{(1.005)^{6} - 1}{0.005}$	6.075502
0.008	$\frac{(1.008)^{6} - 1}{0.008}$	6.121288
0.012	$\frac{(1.012)^{6} - 1}{0.012}$	6.182906
0.015	$\frac{(1.015)^{6} - 1}{0.015}$	6.229551

Los factores –un poco mayor y un poco menor al factor de la tasa buscada– con sus respectivas tasas son:

Tasa = Factor

0.008 = 6.121288

? = 6.1520

0.012 = 6.182906

Lo anterior, en forma de diagrama, nos queda:

```
6.121288                         6.152016                          6.182906
   |________________________________|________________________________|
|                                 |                                |
 0.008                            ?                              0.012
```

Con nuestra fórmula de interpolación:

$$\frac{\textit{Factor de la tasa buscada} - \textit{Factor de la tasa mayor}}{\textit{Factor de la tasa menor} - \textit{Factor de la tasa mayor}} = \frac{\textit{Tasa buscada} - \textit{Tasa mayor}}{\textit{Tasa menor} - \textit{Tasa mayor}}$$

$$\frac{6.152016 - 6.182906}{6.121288 - 6.182906} = \frac{i - 0.012}{0.008 - 0.012}$$

$$\frac{-0.030890}{-0.061618} = \frac{I - 0.012}{-0.004} \longrightarrow 0.501315 = \frac{i - 0.012}{-0.004}$$

$$\longrightarrow 0.501315\,(-0.004) = i - 0.012 \longrightarrow -0.002005 = i - 0.012$$

$$\longrightarrow -0.002005 + 0.012 = i \longrightarrow 0.009995 = i$$

Así, la tasa que buscamos es de 0.01(por el redondeo de cifras).

El segundo miembro de la ecuación nos debe dar el mismo valor del factor del primer miembro de la ecuación. Comprobemos:

$$6.152016 = \frac{(1 + i)^{6} - 1}{i} \longrightarrow 6.152016 = \frac{(1.01)^{6} - 1}{0.01}$$

$$\longrightarrow 6.152016 = 6.152015$$

Se trata prácticamente del mismo resultado.

3.2.2. Valor actual de una anualidad ordinaria (*C*)

Cuando la época del cálculo coincide con la iniciación de la serie de pagos o rentas, el valor equivalente de la serie es actual. El lapso que transcurre entre la fecha de la entrega del valor actual y el vencimiento de la primera anualidad será igual a cada periodo que separa a las demás rentas.

El valor presente o actual de las anualidades ordinarias se puede presentar en alguna de estas dos modalidades:

a. Como el descuento de una serie de anualidades, que vencen escalonadamente y están separadas por intervalos iguales de tiempo.

b. Como la determinación de un capital que, invertido a interés, proporciona una serie de rentas futuras.

Ejercicio 36. Se tienen seis pagarés, con vencimientos escalonados en forma cuatrimestral, cada uno de $25,000.00, y se quieren liquidar, el día de hoy, siendo una tasa del 6% cuatrimestral.

Determinemos el valor actual o presente de cada documento:

OPERACIÓN	RESULTADO
1era. renta $[25000(1.06)^{-1}]$	$23,584.91
2da. renta $[25000(1.06)^{-2}]$	$22,249.91
3ra. renta $[25000(1.06)^{-3}]$	$20,990.48
4a. renta $[25000(1.06)^{-4}]$	$19,802.34
5a. Renta $[25000(1.06)^{-5}]$	$18,681.45
6a. Renta $[25000(1.06)^{-6}]$	$17,624.01
VALOR ACTUAL TOTAL	$122,933.10

Ahora bien, ¿qué cantidad habrá que invertir al 6% cuatrimestral, para tener derecho a recibir seis rentas de $25,000.00 cada una? Conforme a la resolución anterior, se sabe que el valor actual es de $122,933.10. Comprobemos si con el importe de seis pagos de $25,000.00 cada uno el deudor salda su cuenta.

Capital invertido	$122,933.10
Intereses del 1er. cuatrimestre (0.06)	$7,375.98
Suma	$130,309.08
Menos el pago de la 1a. renta	$25,000.00
Saldo al final del 1er. cuatrimestre	$105,309.08
Intereses del saldo (0.06)	$6,318.55
Suma	$111,627.63
Menos el pago de la 2a. renta	$25,000.00
Saldo al final del 2o. cuatrimestre	$86,627.63
Intereses del saldo (0.06)	$5,197.65
Suma	$91,825.28
Menos el pago de la 3a. renta	$25,000.00
Saldo al final del 3er. cuatrimestre	$66,825.28
Intereses del saldo (0.06)	$4,009.52
Suma	$70,834.80
Menos el pago de la 4a. renta	$25,000.00
Saldo al final del 4o. cuatrimestre	$45,834.80
Intereses del saldo (0.06)	$2,750.09
Suma	$48,584.89
Menos el pago de la 5a. renta	$25,000.00
Saldo al final del 5o. cuatrimestre	$23,584.89
Intereses del saldo (0.06)	$1,415.09
Suma	$24,999.98
Menos el pago de la 6a. renta	$25,000.00
SALDO FINAL	$ –0.02*

* Por el redondeo de cifras

Dado lo anterior, se debe encontrar el valor actual de cada pago para determinar el valor presente total de la serie de rentas. Podemos decir que el valor actual es igual a la suma de los valores actuales de cada renta.

En este caso, se utiliza la fórmula siguiente:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(35)$$

Si sustituimos en la fórmula los datos de nuestro problema, tenemos:

$$C = 25000\left[\frac{1-(1.06)^{-6}}{0.06}\right] = \$122,933.10$$

3.2.2.1. Cálculo de la renta

Si partimos de la fórmula que proporciona el valor actual de anualidades ordinarias:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \rightarrow \frac{C}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \rightarrow \frac{R}{C} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

tenemos:

$$R = \frac{C\,i}{\quad} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(36)$$

$$1-(1+i)^{-n}$$

Ejemplifiquemos la fórmula de la renta (*R*) con el ejercicio siguiente.

Ejercicio 37. ¿Qué cantidad se debe pagar cada cuatro meses (*R*) para liquidar una deuda de $122,933.10 (*C*) en 6 pagos (*n*), si se utiliza una tasa del 24% convertible cuatrimestralmente (*i*)?

C = $122,933.10

i = 24% convertible cuatrimestralmente = 0.24 /4 = 0.06 cuatrimestral

n = 6 cuatrimestres

R = ? cuatrimestral

$$R=\frac{122933.10 * 0.06}{1-(1+0)^{-6}}=\$25,000.00$$

3.2.2.2. Cálculo del tiempo

De la fórmula de valor actual de anualidades ordinarias se determina el tiempo:

$$C=R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\;\Longrightarrow\;\frac{C}{R}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\;\Longrightarrow\;\frac{Ci}{R}=1-(1+i)^{-n}$$

Luego, se cambian los signos:

$$\frac{Ci}{R} - 1 = -(1+i)^{-n} \quad \longrightarrow \quad 1 - \frac{Ci}{R} = (1+i)^{-n}$$

Se puede escribir así:

$$1 - \frac{Ci}{R} = \frac{1}{(1+i)^{n}}$$

Y se buscan los valores **inversos:**

$$\frac{1}{1 - \frac{Ci}{R}} = (1+i)^{n}$$

Posteriormente, se aplican logaritmos:

$$\log 1 - \log\left(1 - \frac{Ci}{R}\right) = n \log(1+i)$$

Lo que da:

$$-\frac{\log\left[1 - \frac{Ci}{R}\right]}{\log(1+i)} = n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(37)$$

A continuación, apliquemos la fórmula del tiempo (*n*) a partir del valor actual (*C*).

Ejercicio 38. ¿En cuántos pagos (*n*) se liquidará una deuda de \$122,933.10 (*C*) con pagos cuatrimestrales de \$25,000.00 (*R*), si se impone una tasa de interés del 24% capitalizable cuatrimestralmente?

C = \$122,933.10

i = 24% convertible cuatrimestralmente = 0.24 /4 = 0.06 cuatrimestral

R = \$25,000.00 cuatrimestral

n = ? cuatrimestres

$$n = -\frac{\log\left[1 - \dfrac{122933.10 * 0.06}{25000}\right]}{\log(1 + 0.06)} = -\frac{-0.151835179}{0.025305865}$$

n = 6 cuatrimestres

3.2.2.3. Cálculo de la tasa

La fórmula para calcular el valor actual de las anualidades ordinarias es:

$$C = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Al pasar *R* al primer miembro:

$$\frac{C}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Como en el caso del monto de las anualidades ordinarias, al calcular la tasa, se sigue el procedimiento de interpolación que se vio en ese tema.

Ejercicio 39. ¿A qué tasa cuatrimestral se aplicó una deuda de \$122,933.10 (*C*) que se liquidó en 6 pagos (*n*) cuatrimestrales de \$25,000.00 (*R*) cada uno?

C = \$122,933.10

i = ? cuatrimestral

R = \$25,000.00 cuatrimestral

n = 6 cuatrimestres

$$\frac{C}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Sustituyendo:

$$\frac{122933.1}{25000} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \longrightarrow 4.917324 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Luego, se prueban las tasas:

TASA	SUSTITUCIÓN	FACTOR
	$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	
0.05	$\frac{1-(1+0.05)^{-6}}{0.05}$	5.075692
0.055	–6	4.995530

	1 – (1 + 0.055) --------------------- 0.055	
0.065	–6 1 – (1 + 0.065) --------------------- 0.065	4.841014
0.07	–6 1 – (1 + 0.07) -------------------- 0.07	4.766540

En diagrama, queda así:

4.841014 4.917324 4.995530

|________________________________|________________________________|

| | |

0.065 ? 0.055

Luego, con la fórmula de interpolación:

$$\frac{\textit{Factor de la tasa buscada} - \textit{Factor de la tasa mayor}}{\textit{Factor de la tasa menor} - \textit{Factor de la tasa mayor}} = \frac{\textit{Tasa buscada} - \textit{Tasa mayor}}{\textit{Tasa menor} - \textit{Tasa mayor}}$$

$$\frac{4.917324 - 4.841014}{4.995530 - 4.841014} = \frac{i - 0.065}{0.055 - 0.065}$$

$$\frac{0.076310}{0.154516} = \frac{i - 0.065}{-0.010} \rightarrow 0.493865 = \frac{i - 0.065}{-0.010}$$

$$\rightarrow 0.493865\,(-0.010) = i - 0.065 \rightarrow -0.004939 = i - 0.065$$

$$\rightarrow -0.004939 + 0.065 = i \rightarrow 0.060061 = i$$

Así, la tasa que buscamos es de 0.06 (por el redondeo de cifras). Y si la sustituimos en el segundo miembro de la ecuación nos debe dar el mismo valor del factor del primer miembro de la ecuación. Comprobemos:

$$4.917324 = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \rightarrow 4.917324 = \frac{1 - (1.06)^{-6}}{0.06}$$

$$4.917324 = 4.917324$$

3.3. Anualidades anticipadas

A diferencia de las anualidades vencidas –que se pagan al final de cada periodo–, las anticipadas se cubren al comienzo de cada periodo.

```
Ordinarias:                R       R       R       R        R
                    |______|______|______|______|______|
                    |      |      |      |      |      |
Anticipadas:        R      R      R      R      R
```

En las anualidades ordinarias, la primera anualidad se paga al final del periodo, mientras que en las anticipadas se realiza al comenzar el mismo. Por eso, el pago de la última renta ordinaria coincide con la terminación del plazo de tiempo estipulado en la operación, esto hace que no produzca intereses y que su inversión se haga solamente como complemento del monto de las rentas. En tanto, en las anualidades anticipadas, la última renta se paga al principio del último periodo: sí produce intereses.

Cálculo del monto

La fórmula del monto de las anualidades anticipadas es:

$$M = R \left[\frac{(1 + i)^{n + 1} - (1 + i)}{i} \right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

Ejercicio 40. Si se hacen 6 depósitos trimestrales anticipados (*n*) de $25,000.00 cada uno (*R*), con una tasa del 20% capitalizable trimestralmente (*i*), ¿cuál es el monto (*M*)?

R = $25,000.00 trimestrales
i = 20% capitalizable trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral
n = 6 trimestres
M =

a. Aritméticamente

1ª. renta (principio del primer trimestre)	$25,000.00
Intereses por el primer trimestre	1,250.00
2ª. renta (principio del segundo trimestre)	25,000.00
Monto al final del primer trimestre	51,250.00
Intereses por el segundo trimestre	2,562.50
3ª. renta (principio del tercer trimestre)	25,000.00
Monto al final del segundo trimestre	78,812.50
Intereses por el tercer trimestre	3,940.63
4ª. renta (principio del cuarto trimestre)	25,000.00
Monto al final del tercer trimestre	107,753.13
Intereses por el cuarto trimestre	5,387.65
5ª. renta (principio del quinto trimestre)	25,000.00

Monto al final del cuarto trimestre	138,140.78
Intereses por el quinto trimestre	6,907.04
6ª. renta (principio del sexto trimestre)	25,000.00
Monto al final del quinto trimestre	170,047.82
Intereses por el sexto trimestre	8,502.39
Monto al final del sexto trimestre	$178,550.21

b. Por fórmula

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}\right] \longrightarrow M = R\left[\frac{(1+0.05)^{6+1} - (1+0.05)}{0.05}\right]$$

$$\longrightarrow M = 25000\left[\frac{(1.05)^{7} - (1.05)}{0.05}\right] = \$178{,}550.21$$

Si a nuestra fórmula:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}\right]$$

le sacamos al quebrado el factor común (1 + i), queda:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right](1+i) \qquad (43)$$

Y si a la fórmula:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-(1+i)}{i}\right]$$

le hacemos la resta expresada en el numerador del quebrado:

$$M = R\,\frac{\left[(1+i)^{n+1}-1-i\right]}{i} \qquad\qquad M = R\,\frac{\left[(1+i)^{n+1}-1\right]}{i} - \frac{i}{i}$$

se genera la fórmula siguiente:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] \qquad (44)$$

Y si con los datos de nuestro ejercicio utilizamos las dos últimas fórmulas, obtenemos:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right](1+i)$$

$$M = 25000 \left[\frac{(1 + 0.05)^{6} - 1}{0.05} \right] (1 + 0.05) = \$178,550.21$$

$$M = R \left[\frac{(1 + i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right]$$

$$M = 25000 \left[\frac{(1 + 0.05)^{6+1} - 1}{0.05} - 1 \right] = \$178,550.21$$

Cálculo de la renta

De la fórmula del monto de las anualidades anticipadas:

$$M = R \left[\frac{(1 + i)^{n + 1} - (1 + i)}{i} \right]$$

Luego, despejamos *R*:

$$R = \frac{Mi}{(1 + i)^{n+1} - (1 + i)} \qquad (45)$$

Ahora, apliquemos la fórmula.

Ejercicio 41. Se hacen 6 depósitos trimestrales anticipados (*n*) con una tasa del 20% capitalizable trimestralmente (*i*), ¿cuál será el monto de cada una de las rentas (*R*) si el monto total a obtener es $178,550.21 (*M*)?

R = ? trimestrales

I = 20% capitalizable trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral
n = 6 trimestres

M = $178,550.21

$$\mathbf{R} = \frac{178550.21*0.05}{(1+0.05)^{6+1} - (1+0.05)} = \mathbf{\$25,000.00}$$

Cálculo del tiempo

De la fórmula del monto de las anualidades anticipadas despejamos *n*:

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{Mi}{R\,(1+i)} + 1\right]}{\log\,(1+i)} \qquad \text{(46)}$$

Luego, aplicamos lo anterior en el ejercicio siguiente.

Ejercicio 42. ¿Cuántos depósitos trimestrales anticipados (*n*) de \$25,000.00 (*R*), con una tasa de 20% capitalizable trimestralmente (*i*) se deben hacer para obtener un monto de \$178,550.21 (*M*)?

M = \$178,550.21

R = \$25,000.00 trimestrales

i = 20% capitalizable trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral

n = ? trimestres

$$n = \frac{\log \left[\dfrac{178550.21 * 0.05}{25000\,(1 + 0.05)} + 1 \right]}{\log\,(1 + 0.05)} = \frac{0.1271357}{0.0211892} = 6 \text{ trimestre}$$

Cálculo de la tasa

De la fórmula del monto de anualidades anticipadas:

$$M = R \left[\frac{(1 + i)^{n + 1} - (1 + i)}{i} \right]$$

pasamos *R* al primer miembro:

$$\frac{M}{R} = \frac{(1 + i)^{n+1} - (1 + i)}{i}$$

En el ejercicio siguiente, realizamos el procedimiento para obtener la tasa de interés.

Ejercicio 43. ¿Cuál es la tasa de interés (*i*) si se realizan 6 depósitos trimestrales anticipados (*n*) de $25,000.00 (*R*) para obtener un monto de $178,550.21 (*M*)?

M = $178,550.21

R = $25,000.00 trimestrales

n = 6 trimestres

i = ?

Sustituimos:

$$\frac{178550.21}{25000} = \frac{(1 + i)^{6+1} - (1 + i)}{i} \longrightarrow 7.1420084 = \frac{(1 + i)^{7} - (1 + i)}{i}$$

Luego, probamos las tasas.

TASA	SUSTITUCIÓN	FACTOR
	$\frac{(1 + i)^{7} - (1 + i)}{i}$	
0.04	$\frac{(1 + 0.04)^{7} - (1 + 0.04)}{0.04}$	6.8982945
0.045	$\frac{(1 + 0.045)^{7} - (1 + 0.045)}{0.045}$	7.0191518
	7	

0.055	(1 + 0.055) – (1 + 0.055) --------------------------------- 0.055	7.2668938
0.06	7 (1 + 0.06) – (1 + 0.06) ------------------------------- 0.06	7.3938376

En diagrama:

```
7.2668938                     7.1420084                     7.0191518
   |______________________________|______________________________|
|                                |                               |
0.055                            ?                            0.045
```

Con la fórmula de interpolación, queda:

$$\frac{\textit{Factor de la tasa buscada} - \textit{Factor de la tasa mayor}}{\textit{Factor de la tasa menor} - \textit{Factor de la tasa mayor}} = \frac{\textit{Tasa buscada} - \textit{Tasa mayor}}{\textit{Tasa menor} - \textit{Tasa mayor}}$$

$$\frac{7.1420084 - 7.2668938}{7.0191518 - 7.2668938} = \frac{i - 0.055}{0.045 - 0.055}$$

$$\frac{-0.1248854}{-0.247742} = \frac{i - 0.055}{-0.010} \longrightarrow 0.5040945 = \frac{i - 0.055}{-0.010}$$

$$\longrightarrow$$

$\rightarrow 0.5040945(-0.010) = i - 0.055 \qquad -0.0050409458 = i - 0.055$

$\rightarrow -0.0050409458 + 0.055 = i \rightarrow 0.049959 = i$

Entonces, la tasa que buscamos es de 0.05 (por el redondeo de cifras). Y si la sustituimos en el segundo miembro de la ecuación nos debe dar el mismo valor del factor del primer miembro de la ecuación. Comprobemos:

$$7.1420084 = \frac{(1+i)^{7} - (1+i)}{i} \rightarrow 7.1420084 = \frac{(1.05)^{7} - (1.05)}{0.05}$$

$$7.1420084 = 7.1420084$$

Valor presente

Fórmula del valor presente:

$$C = R\left[\frac{(1+i) - (1+i)^{-n+1}}{i}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(47)$$

Ejercicio 44. ¿Cuál es el capital (*C*) de 6 depósitos trimestrales (*n*) de \$25,000.00 (*R*) si se calculan con 20% compuesto trimestralmente (*i*)?

C = ?

R = \$25,000.00 trimestrales

n = 6 trimestres

i = 20 % compuesto trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral

$$C = 25000\left[\frac{(1 + 0.05) - (1 + 0.05)^{-6+1}}{0.05}\right] = \$133,236.92$$

De la fórmula del valor actual de anualidades anticipadas:

$$C = R\left[\frac{(1 + i) - (1 + i)^{-n+1}}{i}\right]$$

obtenemos el factor común:

$$C = R\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\right](1 + i)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(48)$$

O, si hacemos la división, resulta:

$$C = R\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n+1}}{i} + 1\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(49)$$

Comprobemos estas últimas fórmulas con los datos de nuestro ejercicio:

C = ?

R = $25,000.00 trimestrales

n = 6 trimestres

i = 20% compuesto trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i) \longrightarrow C = 25000\left[\frac{1-(1+0.05)^{-6}}{0.05}\right](1+0.05)$$

$$C = \$133{,}236.92$$

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}+1\right] \qquad C = 25000\left[\frac{1-(1+0.05)^{-6+1}}{0.05}+1\right]$$

$$C = \$133{,}236.92$$

CÁLCULO DE LA RENTA

De la fórmula del valor presente de las anualidades anticipadas:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}+1\right] \quad \text{…………………………………………………………(49)}$$

despejamos *R*:

$$R = \frac{C}{\qquad ^{-n+1}} \quad \text{…………………………………………………………(50)}$$

$$\frac{1-(1+i)}{i}+1$$

Ejercicio 45. ¿De cuánto es cada uno (*R*) de 6 pagos trimestrales anticipados (*n*) que se deben realizar para liquidar una deuda de \$133,236.92 (*C*), si se impone una tasa de interés de 20% compuesto trimestralmente (*i*)?

C = \$133,236.92

n = 6 trimestres

i = 20 % compuesto trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral

R = ? trimestrales

$$R = \frac{133236.92}{\dfrac{1-(1+0.05)^{-6+1}}{0.05}+1} = \$25{,}000.00$$

CÁLCULO DEL TIEMPO

De la fórmula del valor actual de las anualidades anticipadas:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

despejamos *n*:

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{R\,(1+i)}{R\,(1+i) - Ci}\right]}{\log\,(1+i)} \qquad \text{……………………………………………………………(51)}$$

Ejercicio 46. Calcular el número de pagos (*n*), de \$25,000.00 cada uno (*R*), para liquidar una deuda de \$133,236.92 (*C*) impuesta a una tasa del 20% compuesto trimestralmente (*i*).

C = \$133,236.92

i = 20 % compuesto trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral

R = \$25,000.00 trimestrales

n = ? trimestres

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{25000\,(1+0.05)}{25000(1+0.05) - (133236.92 * 0.05)}\right]}{\log\,(1+0.05)} = \frac{\log 1.3400957}{\log 1.05}$$

$$n = \frac{0.1271358}{0.0211892} = 6 \text{ trimestres}$$

CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS

De la fórmula del valor actual:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i} + 1\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(49)$$

pasamos *R* al primer miembro:

$$\frac{C}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i} + 1$$

En el ejercicio siguiente, apliquemos el procedimiento de interpolación.

Ejercicio 47. ¿Qué tasa de interés (*i*) se aplicó a 6 pagos trimestrales (*n*), de $25,000.00 cada uno (*R*), para liquidar una deuda de $133,236.92 (*C*)?

C = $133,236.92
R = $25,000.00 trimestrales
n = 6 trimestres
i = ?

Sustituimos:

$$\frac{133236.92}{25000} = \frac{1-(1+i)^{-6+1}}{i} + 1 \longrightarrow 5.3294768 = \frac{1-(1+i)^{-5}}{i} + 1$$

Luego, probamos las tasas:

TASA	SUSTITUCIÓN	FACTOR
	$\dfrac{1-(1+i)^{-5}}{i}+1$	
0.04	$\dfrac{1-(1+0.04)^{-5}}{0.04}+1$	5.4518223
0.045	$\dfrac{1-(1+0.045)^{-5}}{0.045}+1$	5.3899767
0.055	$\dfrac{1-(1+0.055)^{-5}}{0.055}+1$	5.2702844
0.06	$\dfrac{1-(1+0.06)^{-5}}{0.06}+1$	5.2123637

En diagrama:

5.2702844 5.3294768 5.3899767

|________________________________|________________________________|

| | |

0.055 ? 0.045

Y si aplicamos la fórmula de interpolación:

$$\frac{\text{Factor de la tasa buscada} - \text{Factor de la tasa mayor}}{\text{Factor de la tasa menor} - \text{Factor de la tasa mayor}} = \frac{\text{Tasa buscada} - \text{Tasa mayor}}{\text{Tasa menor} - \text{Tasa mayor}}$$

$$\frac{5.3294768 - 5.2702844}{5.3899767 - 5.2702844} = \frac{i - 0.055}{0.045 - 0.055}$$

$$\frac{0.0591924}{0.1196923} = \frac{i - 0.055}{-0.010} \longrightarrow 0.4945380 = \frac{i - 0.055}{-0.010}$$

$$\longrightarrow 0.4945380(-0.010) = i - 0.055 \longrightarrow -0.00494538 = i - 0.055$$

$$\longrightarrow -0.00494538 + 0.055 = I \longrightarrow 0.050054619 = i$$

Finalmente, la tasa que buscamos es de 0.05 (por el redondeo de cifras). Y si la sustituimos en el segundo miembro de la ecuación, nos debe dar el mismo valor del factor del primer miembro de la ecuación. Comprobemos:

$$5.3294768 = \frac{1 - (1 + i)^{-5}}{i} + 1 \longrightarrow 5.3294768 = \frac{1 - (1.05)^{-5}}{0.05} + 1$$

$$5.3294768 = 5.3294768$$

3.4. Anualidades diferidas

Cuando la serie de pagos se inicia en alguna fecha futura, decimos que su pago se aplaza o se difiere. En este tipo de anualidades, hay dos tiempos:

a. Diferido o intervalo de aplazamiento, en el que no se realiza pago alguno. Se le llama *r*.
b. De percepción (*n*).

La gráfica siguiente ejemplifica el caso de anualidades ordinarias diferidas:

```
          .                                   R       R       R       R       R      R
   |______|______|______|______|______|______|______|______|______|____|
0        1        2        3        4        5        6        7        8        9    10


         1        2        3        4        1        2        3        4        5      6
|____________ ___________||__________________________________|
                    |                                       |
          Tiempo diferido                        Tiempo de percepción
```

Como se ve en el diagrama, el primer pago se realizará en una fecha futura, es decir, al terminar el quinto periodo, y durante cuatro periodos no se hace pago. Es evidente que éste es un caso de anualidades ordinarias diferidas.

MONTO DE LAS ANUALIDADES DIFERIDAS

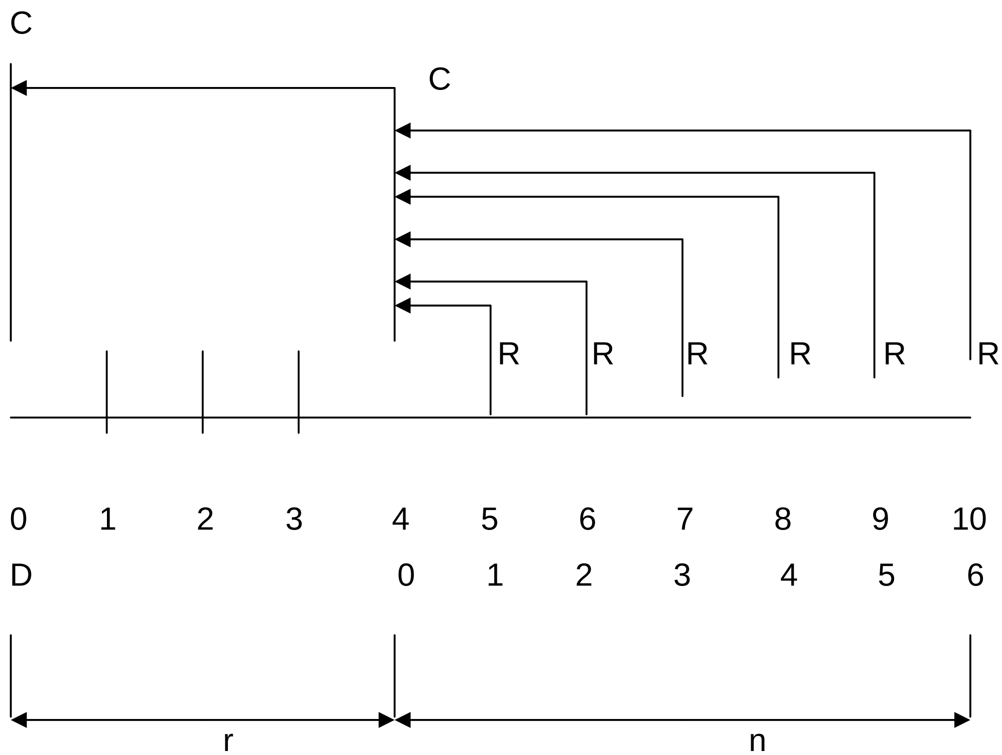
El monto de las anualidades diferidas vencidas es igual al de las anualidades ordinarias, en las mismas condiciones de importe de la renta, plazo o tiempo y tasa de interés. Esto se debe a que, durante el tiempo diferido, no se realiza ningún pago o depósito.

VALOR ACTUAL DE LAS ANUALIDADES VENCIDAS DIFERIDAS

El valor presente de las anualidades ordinarias coincide con la iniciación del tiempo de pago, en tanto que el valor actual de las anualidades diferidas se sitúa en el comienzo del tiempo diferido. En otras palabras, el valor actual de las anualidades diferidas se calcula a una fecha anterior de aquella a la cual se calcula el valor presente de las anualidades ordinarias. Así, en el ejemplo del diagrama, el valor actual de las anualidades diferidas se calcularía en el 0, en tanto que, si no existiera el tiempo diferido, y nos encontráramos frente a un caso de anualidades ordinarias, su valor actual se determinaría en el 4.

Para encontrar el valor actual de las anualidades diferidas, se puede calcular el valor presente como si se tratara de anualidades ordinarias, a la fecha en que se inicia el periodo de pago. Conocido ese valor, lo descontamos por el tiempo diferido, para regresarlo, en el tiempo, a la fecha de iniciación del periodo de aplazamiento.

Lo anterior, en forma de diagrama, se expresa de la siguiente manera:



Ahora bien, tomando el punto 4 como punto 0, tenemos que en el punto 0 está el valor actual de las anualidades ordinarias, que se deben descontar en *r* periodos, para encontrar el valor actual de las anualidades diferidas situadas en el punto D.

Por lo que, sabiendo que el valor presente de las anualidades ordinarias es:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \qquad \text{...(35)}$$

el valor actual está en el punto 0.

Y obtenemos el valor presente en *r* periodos de este valor actual:

$$C = \frac{R\left[\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}{(1+i)^{r}}$$

Al simplificar, tenemos:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-r} \quad ó \quad C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r} * i}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(38)$$

Ejercicio 48. ¿Cuál es el valor actual diferido (*C*) de 6 (*n*) rentas mensuales, de \$25,000.00 cada una (*R*), si se comienza a pagar al finalizar el quinto mes, a partir del día de hoy, y la tasa es del 24% convertible mensualmente (*i*)?

```
    .                               R       R       R       R       R       R
|_______|_______|_______|_______|_______|_______|_______|_______|______|______|
0       1       2       3       4       5       6       7       8      9      10
```

En el diagrama se ve que el número de pagos que no se realizarán es 4, por lo que:

R = \$25,000.00 mensuales
n = 6 mensualidades

r = 4 mensualidades

i = 24% convertible mensualmente = 0.24/12 = 0.02 mensual

C = ?

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-r} \longrightarrow C = 25000\left[\frac{1-(1.02)^{-6}}{0.02}\right](1.02)^{-4}$$

Por tanto:

C = $129,371.40

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r} * i}\right] \longrightarrow C = 25000\left[\frac{1-(1.02)^{-6}}{(1.02)^{4} * 0.02}\right]$$

En consecuencia:

C = $129,371.40

Hagamos la comprobación aritmética:

Capital	$129,371.40
Intereses del primer mes	2,587.43
Monto al final del primer mes	131,958.83
Intereses del segundo mes	2,639.17
Monto al final del segundo mes	134,598.00
Intereses del tercer mes	2,691.96

Monto al final del tercer mes	137,289.96
Intereses del cuarto mes	2,745.80
Monto al final del cuarto mes	140,035.76
Intereses del quinto mes	2,800.71
Suma	142,836.47
Menos la primera renta	25,000.00
Capital al final del quinto mes	117,836.47
Intereses del sexto mes	2,356.73
Suma	120,193.20
Menos la segunda renta	25,000.00
Capital al final del sexto mes	95,193.20
Intereses del séptimo mes	1,903.87
Suma	97,097.07
Menos la tercera renta	25,000.00
Capital al final del séptimo mes	72,097.07
Intereses del octavo mes	1,441.94
Suma	73,539.01
Menos la cuarta renta	25,000.00
Capital al final del octavo mes	48,539.01
Intereses del noveno mes	970.78
Suma	49,509.79
Menos la quinta renta	25,000.00
Capital al final del noveno mes	24,509.79
Intereses del décimo mes	490.21
Suma	25,000.00
Menos la sexta renta	25,000.00
Al final del décimo mes	0.00

Lo anterior ha demostrado la exactitud del valor actual que hemos calculado.

CÁLCULO DE LA RENTA

Partimos de la fórmula del valor actual:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-r} \quad ó \quad C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r} * i}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(38)$$

Despejamos *R*:

$$\frac{C}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-r}} = R \quad ó \quad \frac{C}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r} * i}} = R$$

Lo que es igual a:

$$\left[\frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}\right](1+i)^{r} = R \quad ó \quad \frac{C * (1+i)^{r} * i}{1-(1+i)^{-n}} = R \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (39)$$

Ejercicio 49. ¿Cuáles son las rentas mensuales de 6 (*n*) para liquidar una deuda de \$129,371.40, comenzando a pagar al finalizar el quinto mes, a partir del día de hoy, con una tasa de 24% convertible mensualmente (*i*)?

R = ? mensuales

n = 6 mensualidades

r = 4 mensualidades

i = 24% convertible mensualmente = 0.24/12 = 0.02 mensual

C = \$129,371.40

$$\left[\frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}}\right](1+i)^{r} = R \qquad \text{ó} \qquad \frac{C * (1+i)^{r} * i}{1-(1+i)^{-n}} = R$$

$$\left[\frac{129371.40(0.02)}{1-(1.02)^{-6}}\right](1.02)^{4} = R \qquad \text{ó} \qquad \frac{129371.40\,(1.02)^{4}\,(0.02)}{1-(1.02)^{-6}} = R$$

De lo que resulta:

25,000.00 = R ó *25,000.00 = R*

CÁLCULO DEL TIEMPO DE PERCEPCIÓN

De la fórmula del valor actual:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r} * i}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

pasamos *R* al primer miembro:

$$\frac{C}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r} * i}$$

y colocamos el denominador del segundo miembro en el primer miembro:

$$\frac{C\,[(1+i)^{r} * i]}{R} = 1-(1+i)^{-n}$$

Lo que se puede escribir así:

$$\frac{C\,[(1+i)^{r} * i]}{R} = 1-\frac{1}{(1+i)^{n}}$$

Luego, cambiamos el 1 al primer miembro

$$\frac{C\,[(1+i)^{r} * i]}{R} - 1 = -\frac{1}{(1+i)^{n}}$$

Obtenemos el común denominador del primer miembro:

$$\frac{C\,[(1+i)^{r} * i] - R}{R} = -\frac{1}{(1+i)^{n}}$$

Cambiamos los signos:

$$\frac{R - C\,[(1+i)^{r} * i]}{R} = \frac{1}{(1+i)^{n}}$$

Luego, invertimos la igualdad:

$$\frac{R}{R - C\,[(1+i)^{r} * i]} = (1+i)^{n}$$

Aplicamos logaritmos:

$$\log R - \log \{R - C\,[(1 + i)^{r} * i]\} = n \log(1 + i)$$

Y al despejar *n*, tenemos:

$$n = \frac{\log R - \log \{R - C\,[(1 + i)^{r} * i]\}}{\log (1 + i)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(40)$$

Como es muy laboriosa esta fórmula de aplicación y se basa en la relación entre las anualidades diferidas con las ordinarias, se recomienda, para calcular el tiempo, lo siguiente:

a. Calculamos el monto del valor actual de las anualidades diferidas vencidas por el tiempo diferido, para obtener el valor actual de las anualidades ordinarias.
b. Al conocer el dato del punto anterior, se calcula el tiempo de percepción, utilizando la fórmula del tiempo de anualidades ordinarias.

Apliquemos ambos procedimientos en los ejercicios siguientes.

Ejercicio 50. ¿Cuál es el número (*n*) de rentas mensuales de $25,000.00 cada una (*R*), si se inicia a pagar al finalizar el quinto mes, a partir del día de hoy, para liquidar una deuda de $129,371.40 (*C*), con una tasa de 24% convertible mensualmente (*i*)?

R = $25,000.00 mensuales
n = ? mensualidades

r = 4 mensualidades

i = 24% convertible mensualmente = 0.24/12 = 0.02 mensual

C = $129,371.40

Por fórmula:

$$n = \frac{\log R - \log \{R - C[(1 + i)^{r} * i]\}}{\log (1 + i)}$$

$$n = \frac{\log 25000 - \log \{25000 - 129371.40[(1.02)^{4} * 0.02]\}}{\log (1.02)}$$

$$n = \frac{0.051601}{0.008600} \longrightarrow n = 6 \text{ mensualidades}$$

POR RELACIÓN:

a)

C = $129,371.40 $\qquad M = C(1 + i)^{n} = C(1 + i)^{r}$

r = 4 meses

i = 0.02 mensual

M = ? $\qquad M = 129371.40(1.02)^{4} = \$140,035.76$

b)

C = \$140,035.76

i = 0.02 mensual

R = \$25,000.00 mensuales

n = ? mensualidades

$$n = -\frac{\log\left[1 - \dfrac{Ci}{R}\right]}{\log(1+i)}$$

$$n = -\frac{\log\left[1 - \dfrac{140035.76(0.02)}{25000}\right]}{\log(1.02)} = -\frac{-0.051601}{0.008600} = 6$$

Entonces:

n = 6 mensualidades

CÁLCULO DEL TIEMPO DIFERIDO

Una vez despejada la literal *r*, la fórmula queda así:

$$r = \frac{\log R + \log\left[1 - (1+i)\right]^{-n} - \log(Ci)}{\log(1+i)} \quad \text{...(41)}$$

Se hace la misma anotación que en el tiempo de percepción, por lo que se recomienda:

Calcular el valor actual de las anualidades, como si fueran ordinarias.
Al valor calculado en el punto anterior se le considera como el monto del valor actual de nuestros datos; así, se determina el tiempo diferido a partir de la fórmula del monto de interés compuesto.

Ejercicio 51. ¿Cuál es el tiempo diferido (*r*) de 6 rentas mensuales (*n*), de $25,000.00 cada una (*R*), a partir del día de hoy, para liquidar una deuda de $129,371.40 (*C*), con una tasa del 24% convertible mensualmente (*i*)?

C = $129,371.40
R = $25,000.00 mensuales
i = 24% convertible mensualmente = 0.24/12 = 0.02 mensual
n = 6 mensualidades
r = ? meses

Por fórmula:

$$r = \frac{\log R + \log\left[1 - (1 + i)^{-n}\right] - \log (Ci)}{\log(1 + i)}$$

$$r = \frac{\log 25000 + \log\left[1 - (1 + 0.02)^{-6}\right] - \log (129371.40 * 0.02)}{\log(1 + 0.02)}$$

$$r = \frac{0.0344007}{0.0086001} = 4 \text{ meses}$$

Por relación:

a)

R = $25,000.00 mensuales

i = 0.02 mensual

n = 6 mensualidades

C = ?

$$C = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 25000\,\frac{1-(1.02)^{-6}}{0.02} = \$140{,}035.77$$

b)

M = $140,035.77

C = $129,371.40

i = 0.02 mensual

r = ? meses

$$n = \frac{\log(M/C)}{\log(1+i)} \longrightarrow r = \frac{\log(M/C)}{\log(1+i)}$$

$$r = \frac{\log\ (140035.77/129371.40)}{\log(1.02)} = \frac{0.0344007}{0.0086001} = 4 \text{ meses}$$

CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS

De la fórmula del valor actual:

$$C = R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{(1 + i)^{r} * i} \right] \text{...}(38)$$

pasamos al primer miembro a *R*:

$$\frac{C}{R} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{(1 + i)^{r} * i}$$

Se debe tomar en cuenta que el primer miembro va a ser un resultado igual al segundo miembro de la ecuación, cuyo factor se obtendrá por interpolación. (Véase el apartado de anualidades ordinarias).

Ejercicio 52. ¿Cuál es la tasa de interés (*i*) de 6 (*n*) de rentas mensuales de $25,000.00 cada una (*R*), para liquidar una deuda de $129,371.40 (*C*), si se inicia a pagar al finalizar el quinto mes, a partir del día de hoy?

C = $129,371.40

R = $25,000.00 mensuales

n = 6 mensualidades

r = 4 meses

i = ? mensual

$$\frac{C}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r} * i}$$

Sustituimos:

$$\frac{129371.40}{25000} = \frac{1-(1+i)^{-6}}{(1+i)^{4} * i} \longrightarrow 5.174856 = \frac{1-(1+i)^{-6}}{(1+i)^{4} * i}$$

Luego, probamos las tasas:

TASA	SUSTITUCIÓN	FACTOR
	$\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r} * i}$	
0.01	$\frac{1-(1+0.01)^{-6}}{(1+0.01)^{4} * 0.01}$	5.569339

0.015	$\frac{1 - (1 + 0.015)^{-6}}{(1 + 0.015)^{4} * 0.015}$	5.3677999
0.025	$\frac{1 - (1 + 0.025)^{-6}}{(1 + 0.025)^{4} * 0.025}$	4.9900897
0.03	$\frac{1 - (1 + 0.03)^{-6}}{(1 + 0.03)^{4} * 0.03}$	4.8131044

Y, expresado en diagrama, queda:

```
4.9900897                    5.174856                     5.3677999
   |_____________________________|______________________________|
|                              |                              |
 0.025                          ?                          0.015
```

Y con la fórmula de interpolación:

$$\frac{\textit{Factor de la tasa buscada} - \textit{Factor de la tasa mayor}}{\textit{Factor de la} - \textit{Factor de la}} = \frac{\textit{Tasa buscada} - \textit{Tasa mayor}}{\textit{Tasa menor} - \textit{Tasa mayor}}$$

tasa menor *tasa mayor*

$$\frac{5.174856 - 4.9900897}{5.3677999 - 4.9900897} = \frac{i - 0.025}{0.015 - 0.025}$$

$$\frac{0.1847663}{0.3777102} = \frac{i - 0.025}{-0.010} \longrightarrow 0.4891747 = \frac{i - 0.025}{-0.010}$$

$$\longrightarrow 0.4891747(-0.010) = i - 0.025 \longrightarrow -0.0048917477 = i - 0.025$$

$$\longrightarrow -0.0048917477 + 0.025 = i \longrightarrow 0.02010 = i$$

Entonces, la tasa que buscamos es de 0.02 (por el redondeo de cifras). Y si la sustituimos en el segundo miembro de la ecuación, debe dar el mismo valor del factor del primer miembro de la ecuación. Comprobemos:

$$5.174856 = \frac{1 - (1 + i)^{-6}}{(1 + i)^{4} * i} \longrightarrow 5.174856 = \frac{1 - (1.02)^{-6}}{(1.02)^{4} * 0.02}$$

$$5.174856 = 5.174856$$

3.5. Caso general de anualidades

En todos los problemas resueltos hasta el momento, los periodos de capitalización han coincidido con los de pago. Es decir, para rentas trimestrales consideramos la tasa trimestral; para pagos mensuales, tasas mensuales, y así sucesivamente. Sin embargo, hay casos en que los periodos de pago no coinciden con los de capitalización. En estas circunstancias, lo primero que se debe hacer es unificar la tasa de interés a los periodos de pago: si los pagos son semestrales, la tasa de interés también debe estar en forma semestral, y así sucesivamente. Precisamente estos problemas son considerados en las anualidades generales.

Antes de revisar el procedimiento que debe seguirse, recordemos lo visto en interés compuesto, respecto de las tasas equivalentes. En ese apartado, utilizamos los símbolos siguientes:

e = Tasa real o efectiva anual.
J = Tasa nominal anual.
m = Número de capitalizaciones por año (frecuencia de conversión de "j")
i = Tasa nominal anual.
p = Número de capitalizaciones por año (frecuencia de conversión de “i”)

Y las fórmulas:

$$J = [(1 + i/p)^{p/m} - 1]m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

$$J = [(1 + e)^{1/m} - 1]m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

$$e = (1 + J/m)^{m} - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

Luego, para solucionar los casos generales de anualidades, se debe hacer lo siguiente:

a. Determinar las tasas equivalentes, para que tanto la tasa de interés como los pagos estén en la misma unidad de tiempo.
b. Manejar el problema como una anualidad simple y utilizar la fórmula respectiva, según la anualidad que corresponda el ejercicio.

Ejercicio 53. ¿Cuál es la cantidad acumulada (*M*) de 12 depósitos bimestrales anticipados (*n*) de $5,000.00 (*R*), si se invierten con el 16% convertible trimestralmente (*i*)?

R = $5,000.00 semestrales

n = 12 bimestres

i = 16% convertible trimestralmente = 0.16 / 4 = 0.04 trimestral = 4% trimestral

M = ? de anualidades anticipadas

a. Se busca la tasa bimestral:

Utilizamos los símbolos:

J = ? = Tasa nominal anual.

m = 6 = Número de capitalizaciones por año (frecuencia de conversión de "j")

i = 16% = 0.16 = Tasa nominal anual

p = 4 = Número de capitalizaciones por año (frecuencia de conversión de "i")

Y se aplica la fórmula:

$J = [(1 + i/p)^{p/m} – 1]m$ ……………………………………………………………(28)

4/6

J = [(1 + 0.16/4) - 1]6 = 0.158951865 = 15.8951865% convertible bimestralmente

Entonces, los nuevos datos son:

R = $5,000.00 semestrales

n = 12 bimestres

i = 15.8951865% convertible trimestralmente = 0.15.8951865 / 6 = 0.026491077 bimestral = 2.6491077% bimestral

M = ? de anualidades anticipadas

b. Ahora, con la fórmula del monto de anualidades anticipadas:

$$M = R \left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(42)$$

Finalmente, sustituimos los nuevos datos:

$$M = 5000 \left[\frac{(1+0.026491077)^{12+1} - (1+0.026491077)}{0.026491077} \right] = \$71,404.81$$

Unidad 4. Amortización

Objetivos particulares de la unidad

El alumno aprenderá y aplicará el método por el cual se va extinguiendo, gradualmente, una deuda o, cuando se requiera liquidar a su vencimiento y que será en un fecha futura, creando un fondo, mediante pagos o depósitos periódicos.

UNIDAD 4. AMORTIZACIÓN

4.1. Amortización de una deuda

Amortización es el método por el cual se va liquidando una deuda en pagos parciales. El importe de cada pago sirve para solventar los intereses de la deuda, y el sobrante se abona al capital que se debe en ese periodo.

Para encontrar cada una de las variables o incógnitas, se utiliza la fórmula del valor actual de los diversos tipos de anualidades (véase las unidades anteriores). Generalmente, se calcula con base en el valor actual de las anualidades ordinarias; por eso, la fórmula para calcular los diferentes datos es:

$$C = R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

En la amortización se demuestra que:

- El capital va disminuyendo conforme se van dando los pagos, hasta su liquidación total.
- Al ir reduciéndose el capital, los intereses también van descendiendo.
- La amortización del capital va aumentando conforme pasan los periodos, al ir disminuyendo –en la misma proporción– los intereses.
- Si se quieren conocer las amortizaciones de los diferentes periodos, basta multiplicar la primera amortización por la razón:

$$(1 + i)^{n}$$

donde *n* es el número de periodos que faltan para llegar a la amortización del periodo correspondiente.

La suma de las amortizaciones será igual al valor actual o capital inicial del préstamo.

4.2. Tablas de amortización

Para su mayor comprensión, las amortizaciones pueden representarse en una matriz donde:

Las columnas representan lo siguiente:

a. La primera muestra los periodos (*n*).
b. La segunda da el importe de la renta o pago (*R*).
c. La tercera indica los intereses (*I*), y resulta de multiplicar el saldo insoluto (*SI*) anterior por la tasa de interés del periodo (*i*).
d. La cuarta señala la amortización (*A*) del periodo, y resulta de restar al pago del periodo (*R*) los intereses del mismo (*I*).
e. La quinta revela la amortización acumulada (*AA*), consecuencia de la suma de la amortización acumulada (*AA*) del periodo anterior más la amortización (*A*) del periodo en estudio.
f. La sexta expresa el saldo insoluto de la deuda, que se obtiene al hacer alguno de estos procedimientos:
   - Restar al capital inicial (*C*) la amortización acumulada (*AA*) hasta ese periodo.
   - Restar el saldo insoluto del periodo anterior (*SI*) la amortización del periodo (*A*).

Los renglones representan las operaciones de cada uno de los periodos.

Ilustremos lo anterior en el ejercicio siguiente:

Ejercicio 54. Se obtiene un préstamo por $120,000.00 (*C*), los cuales se van a liquidar a través de 6 pagos trimestrales iguales (*n*), con una tasa de interés del 20% convertible trimestralmente (*i*), ¿de cuánto será cada pago?

C = $120,000.00

n = 6 trimestres

i = 20% convertible trimestralmente = 0.20/4 = 0.05 trimestral

R = ? trimestral

$$R = \frac{C\,i}{1-(1+i)^{-n}} \qquad \text{………………………………………………………(36)}$$

$$R = \frac{120000*0.05}{1-(1+0.05)^{-6}} = \frac{6000}{0.253784603} = \$23{,}642.09621 = \$\,23{,}642.10$$

N	Renta (*R*)	Intereses (*I*)	Amortización (*A*)	Amortización acumulada (*AA*)	Saldo insoluto (*SI*)
		(*SI*) anterior por (*i*)	R – I	(*AA*) anterior más (*A*)	a) C – (*AA*) b) (*SI*) anterior menos (*A*)
0	-----o-----	-----o-----	-----o-----	-----o-----	120,000.00
1	23,642.10	6,000.00	17,642.10	17,642.10	102,357.90
2	23,642.10	5,117.89	18,524.21	36,166.31	83,833.69
3	23,642.10	4,191.68	19,450.42	55,616.73	64,383.27
4	23,642.10	3,219.16	20,422.94	76,039.67	43,960.33
5	23,642.10	2,198.02	21,444.08	97,483.75	22,516.25
6	23,642.10	1,125.81	22,516.29	120,000.04 *	– 0.04*
Total	141,852.60	21,852.56	120,000.04 *		

* Debido al redondeo de cifras, hay una pequeña variación.

En la tabla, se expresa:

El capital o saldo insoluto (*SI*) va disminuyendo, al igual que los intereses (*I*).

La amortización (*A*) va aumentando conforme pasan los periodos, y aumenta en la misma cantidad en que disminuyen los intereses (*I*).

Si multiplicamos, por ejemplo, la primera amortización por $(1.05)^3$, obtendremos la cuarta amortización sin necesidad de conocer la del tercer periodo:

$$17642.10\ (1.05)^3 = 20{,}411.94$$

Lo que concuerda con lo dicho en los incisos, ya que del primer al cuarto periodo hay 3 periodos, número exponente (*n*) de la razón (1 + i).

La suma de las amortizaciones (*A*), o amortización acumulada (*AA*), nos da el total del capital original.

Para obtener el saldo insoluto (*SI*) de cierto periodo, basta aplicar la fórmula del capital de anualidades ordinarias:

$$C = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

En donde *n* son los periodos de pago que faltan por efectuar. Por ejemplo: si quisiéramos obtener el saldo insoluto al realizar el cuarto pago, lo haríamos así:

Como se esperan consumar dos periodos más, *n* sería igual a dos:

$$C = 23642.10\left[\frac{1-(1+05)^{-2}}{0.05}\right] = 43{,}960.36 = \text{Saldo insoluto del cuarto periodo}$$

NOTA: la diferencia con \$43,960.33 de la tabla se explica por el redondeo que se hizo en la misma.

Además, si se quisiera conocer –sin necesidad de ubicar los periodos anteriores– la amortización acumulada de cierto periodo, basta con restar del capital inicial el saldo insoluto del periodo de que se trate. Por ejemplo, para obtener la amortización acumulada del periodo de pago número cuatro, debemos restar a nuestro capital inicial (*C*) –\$120,000.00– el saldo insoluto de ese periodo, \$43,960.36; entonces, la amortización acumulada será de \$76,039.64.

4.3. Fondos de amortización

Es el método por el cual se provee el monto, por medio de una serie de rentas o pagos, para liquidar una deuda. Asimismo funciona para ahorrar o recuperar el valor histórico de un activo. Esto se realiza invirtiendo una serie de pagos iguales, en periodos iguales, durante el lapso de vida útil del bien, con la finalidad de acumular un monto disponible en efectivo para volver a comprar el sustitutivo del activo al término de su uso. Esta práctica es muy práctica financieramente, aun cuando, al llegar al fin de su vida útil, la cantidad acumulada no llegue a cubrir el costo del bien.

En este rubro, se utilizan las fórmulas del monto o valor futuro de las diferentes anualidades, generalmente, la del monto de anualidades ordinarias:

$$M = R \left[\frac{(1 + i)^{n} - 1}{I} \right] \qquad \text{...} (31)$$

4.4. Tablas de fondos de amortización

En este método se utiliza, al igual que en la amortización, una matriz, en donde:

Las columnas se conforman así:

a. La primera expresa los periodos (*n*).
b. La segunda, los pagos o rentas (*R*).
c. La tercera, los intereses (*I*) del periodo, y resulta de multiplicar el saldo final (*M*) del periodo anterior por la tasa de interés (*i*).
d. La cuarta, la cantidad que se acumula al fondo (*CA*), y se calcula sumando la renta (*R*) más los intereses (*I*) del periodo.
e. La quinta, el saldo final (*M*), resultado de la suma del saldo final (*M*) del periodo anterior más la cantidad que se acumula (*CA*) al fondo del periodo.

Los renglones muestran las operaciones de cada uno de los periodos.

Ilustremos lo anterior con el ejercicio siguiente.

Ejercicio 55. ¿Cuál será el depósito anual para acumular, al cabo de 6 años, un monto de $240,000.00, si dichas rentas obtienen un rendimiento de 8% anual? (Los $240,000.00 representan el valor de un activo adquirido hoy, que se pretende reemplazar al final de su vida útil, que es de 6 años).

$$R = \frac{M * i}{(1 + i)^{n} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

$$R = \frac{(240000)(0.08)}{(1.08)^{6} - 1} = \$32,715.69274 = \$32,715.69$$

Periodos	Rentas (*R*)	Intereses (*I*)	Cantidad que se acumula al fondo (*CA*)	Saldo final o monto (*M*)

N		(M) anterior por (i)	R + I	(*M*) anterior más (*CA*)
1	32,715.69	-----o-----	32,715.69	32,715.69
2	32,715.69	2,617.26	35,332.95	68,048.64
3	32,715.69	5,443.89	38,159.58	106,208.22
4	32,715.69	8,496.66	41,212.35	147,420.57
5	32,715.69	11,793.65	44,509.34	191,929.91
6	32,715.69	15,354.39	48,070.08	239,999.99 *
Total	196,294.14	43,705.85	239,999.99 *	

* Debido al redondeo de cifras hay una pequeña variación.

Si analizamos la tabla, observamos lo siguiente:

- Las rentas sirven para aumentar la inversión que –al finalizar los periodos de pago– se utiliza para liquidar la deuda, o sustituir el activo al expirar su vida útil.
- Los intereses se agregan a la inversión.
- Si se quiere encontrar el saldo al final de cierto periodo de pago, se calcula con la fórmula del monto de las anualidades ordinarias, tomando en cuenta, en *n*, los depósitos o rentas que se han efectuado hasta ese momento. Por ejemplo, el saldo final al cuarto periodo es:

$$M = 32715.69 \left[\frac{(1 + 0.08)^{4} - 1}{0.08} \right] = 147,420.56 =$$

Saldo final (*M*) al terminar el cuarto periodo.

NOTA: la diferencia con $147,420.57 de la tabla se explica por el redondeo que se hizo en la misma.

Unidad 5. Depreciación

5.1. Conceptos

5.2. Método de línea recta

5.3. Método de suma de dígitos

Objetivos particulares de la unidad

El alumno aprenderá y comprenderá el término de depreciación, además aplicará los métodos, de línea recta y el de suma de dígitos, utilizados para la depreciación.

UNIDAD 5. DEPRECIACIÓN

5.1. Conceptos

Depreciación es la pérdida o disminución del valor de un bien, debido a su uso y disfrute u obsolescencia. En el manejo de la depreciación, se deben considerar los siguientes términos con sus respectivas notaciones:

C = Costo o valor original. Es el costo del activo en el momento de su compra o adquisición.

n = Vida útil. Es la diferencia –en tiempo, servicio o unidades producidas– entre la compra y el retiro de uso del activo. En consecuencia, se mide en años, horas de servicio o unidades producidas.

S = Valor de salvamento, desecho o rescate. Es el valor del activo al final de su vida útil. Puede ser:

a. *Nulo.* Cuando el bien no sirve para nada al final de su vida.
b. *Positivo.* Cuando el activo se puede vender en un precio supuesto al final de su vida útil.
c. *Negativo.* Cuando se requiere de un gasto adicional para su remoción o desmantelamiento.

Vt = Valor en libros. Son el valor contable y el que tiene, después de depreciarse, el activo al final de *t* año. Resulta de la diferencia del valor original menos la depreciación acumulada. (Este valor será igual al valor de salvamento al finalizar la vida útil del activo).

B = Base de depreciación o depreciación total. Es la cantidad por la que se va a depreciar el activo. Resulta de restar al costo original su valor de salvamento, por lo que $B = C – S$

Da = Depreciación acumulada. Es la depreciación de *t* año más la de los anteriores. (La depreciación acumulada al final de la vida útil será igual a la base de depreciación).

Dt = Cargo por depreciación. Son los cargos periódicos, o las cantidades que se retienen de las utilidades para poder reemplazar un activo al finalizar su vida útil.

d = Tasa de depreciación. Es el porcentaje fijo que se carga del valor en libros (*Vt*) para obtener la depreciación (*Dt*). (Se utiliza en algunos de los métodos).

En resumen, la nomenclatura a utilizar es:

Letra	Concepto
C	Costo o valor original.
n	Vida útil medida en años, unidades de producción u horas de servicio.
nt	Vida útil del año *t* medida en unidades de producción u horas de servicio.
S	Valor de salvamento, desecho o rescate.
Vt	Valor en libros en el año *t*.
B	Base de depreciación o depreciación total.
Da	Depreciación acumulada.
D	Cargo por depreciación.
Dt	Cargo por depreciación o depreciación por el año *t*.
d	Tasa de depreciación por año.
t	Año *t*.

Para identificar los métodos de depreciación, supongamos que una empresa adquiere cierta maquinaria con un costo original de $210,000.00 y un valor de salvamento de $30,000.00, el cual se recuperará al final de la vida útil del activo, 6 años. La maquinaria producirá un total de 120,000 unidades, distribuidas a lo largo de su vida útil de la siguiente manera:

Años	Unidades producidas
1	25,000
2	30,000

3	25,000
4	15,000
5	15,000
6	10,000
Total	120,000

5.2. Método de línea recta

MÉTODO LINEAL

En éste, se supone que la depreciación anual va a ser igual en todos y cada uno de los años.

Fórmulas:

$$B = C - S \qquad (52)$$

$$D = \frac{C - S}{n} = \frac{B}{n} \qquad (53)$$

$$Da = t^*D \qquad (54)$$

$$Vt = C - Da = C - (t^*D) \qquad (55)$$

Ejercicio 56. Apliquemos los datos del ejercicio descrito al final del inciso 5.1.

Datos:

n = 6 años

C = $210,000.00

S = $30,000.00

$B = C - S$..(52)

$B = 210000 - 30000 = 180000$

$$D = \frac{C - S}{n} = \frac{B}{n} \quad \text{..(53)}$$

$D = 180000/6 = 30000$

$Da = t{*}D$..(54)

$Da(4) = (4)(30000) = 120000$

La depreciación acumulada en el año 4 es de $120,000.00.

$Vt = C - Da = C - (t{*}D)$ ....(55)

$Vk = 210000 - 120000 = 90000$

El valor en libros en el año 4 es de $90,000.00.

Tabla de depreciación

Años (*n*)	Depreciación (*D*)	Depreciación acumulada (*Da*)	Valor en libros (*V*)
0	-----o-----	-----o-----	210,000.00
1	30,000.00	30,000.00	180,000.00
2	30,000.00	60,000.00	150,000.00
3	30,000.00	90,000.00	120,000.00

4	30,000.00	120,000.00	90,000.00
5	30,000.00	150,000.00	60,000.00
6	30,000.00	180,000.00	30,000.00

MÉTODO DE UNIDADES DE PRODUCCIÓN O DE HORAS DE SERVICIO

La depreciación anual (*Dt*) estará en función de las unidades producidas o de las horas del servicio del bien o activo. En este método, la variable *n* representa al número de unidades producidas u horas de servicio. La base de depreciación se distribuye entre las unidades de producción u horas de servicio totales. Y para determinar la depreciación anual (*Dt*), el resultado de la operación anterior se multiplica por las unidades de producción u horas de servicio (*n*) del año respectivo. (Este método también se puede utilizar para calcular la depreciación por kilómetro recorrido en los vehículos).

Fórmulas:

$$Dt = \frac{C - S}{n}(nt) \qquad \text{...}(56)$$

$$Da = (\text{Sumatoria de } nt)(B/n) \qquad \text{...}(57)$$

$$Vk = C - Da \qquad \text{...}(58)$$

Ejercicio 57. Apliquemos los datos del ejercicio descrito al final del inciso 5.1.

Datos:

n = 6 años

Años	Unidades producidas
1	25,000
2	30,000
3	25,000
4	15,000
5	15,000
6	10,000
Total	120,000

C = $210,000.00

S = $ 30,000.00

B = $180,000.00

$$Dt = \frac{C - S}{n}(nt) \quad \text{...(56)}$$

Dt = (180000/120000)(15000) = 22500

Entonces, la depreciación en el año 4 será de $22,500.00.

Da = (Sumatoria de nt)(B/n)..(57)

Da = (95000)(180000/120000) = 142500

Luego, la depreciación acumulada hasta el año 4 será de $142,500.00.

Vt = C – Da...*(58)*

$Vt = 210000 – 142500 = 67500$

Por consiguiente, el valor en libros en el año 4 será de $67,500.00.

Tabla de depreciación

Años	Unidades (*nt*)	Depreciación (*D*)	Depreciación acumulada (*Da*)	Valor en libros (*V*)
0	-----o-----	-----o-----	-----o-----	210,000.00
1	25,000.00	37,500.00	37,500.00	172,500.00
2	30,000.00	45,000.00	82,500.00	127,500.00
3	25,000.00	37,500.00	120,000.00	90,000.00
4	15,000.00	22,500.00	142,500.00	67,500.00
5	15,000.00	22,500.00	165,000.00	45,000.00
6	10,000.00	15,000.00	180,000.00	30,000.00

MÉTODO DE PORCENTAJE FIJO (CONSTANTE) O DE TASA FIJA

Al finalizar cada año, el activo se deprecia en el mismo porcentaje (*dt*). El porcentaje va a ser el mismo en todos los años, pero la depreciación irá disminuyendo conforme pasan los años: no es igual para todos los periodos.

Fórmulas:

$Dt = (V_{t-1}) (d)$ ……………………………………………………………………..(59)

Entonces, la depreciación del año *t* es igual al valor en los libros del año anterior por la tasa de depreciación.

$$V_t = C\,(1 - d)^t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

$$S = C\,(1 - d)^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

Así, el valor de salvamento es igual al valor en los libros en el último año, es decir, cuando $t = n$. (La condición para realizar una depreciación por este método es que el valor de salvamento (*S*) sea mayor que 0; y si es nulo, se debe poner un valor igual a la unidad para determinar la tasa fija).

Ejercicio 58. Apliquemos los datos del ejercicio descrito al final del inciso 5.1.

$n = 6$ *años*
$C = \$210,000.00$
$S = \$30,000.00$
$B = \$180,000.00$

Como nuestra intención es saber la tasa a la que se va a depreciar el activo, despejamos *d* de la siguiente fórmula:

$$S = C\,(1 - d)^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

Y nos queda:

$$d = 1 - (S/C)^{1/n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (62)$$

Por tanto:

$$d = 1 - (30000/210000)^{1/6} = 0.276979973 = 27.6979973\%\ anual$$

$$Vt = C\ (1 - d)^{t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

$$Vt = 210000\ (1 - 0.276979973)^{4} = 57387.93549$$

El valor en libros en el año cuatro será de \$57,387.94.

$$Dt = (V_{t-1})\ (d) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (59)$$

$$D5 = (57387.94)(0.276979973) = 15895.31$$

La depreciación del año 5 es igual al valor en libros del año anterior por la tasa de depreciación; es decir, \$15,895.31.

Tabla de depreciación:

Años (*n*)	Tasa de depreciación (*d*)	Depreciación (*D*)	Depreciación acumulada (*Da*)	Valor en libros (*V*)
0	-----o-----	-----o-----	-----o-----	210,000.00
1	0.276979973	58,165.79	58,165.79	151,834.21
2	0.276979973	42,055.04	100,220.83	109,779.17
3	0.276979973	30,406.63	130,627.46	79,372.54
4	0.276979973	21,984.60	152,612.06	57,387.94
5	0.276979973	15,895.31	168,507.37	41,492.63
6	0.276979973	11,492.63	180,000.00	30,000.00

5.3. Método de suma de dígitos

MÉTODO DE LA SUMA DE DÍGITOS

En este método, la depreciación es mayor en los primeros años.

Fórmulas:

$a = (n - t) + 1$..(63)

Lo anterior representa los años de vida útil ordenados inversamente. Si son 6 años de vida útil, el año 1 tendrá como dígito el 6; y el año 6, el 1.

$$b = \frac{n\,(n+1)}{2}$$ ....(64)

Es la suma de los dígitos que corresponden a los años de vida del activo.

$$Dt = (C - S)*(a/b) = B * \left(\frac{(n-t)+1}{b} \right)$$ ....(65)

$Da = (C - S)$ (sumatoria de a/b)..(66)

Ejercicio 59. Apliquemos los datos del ejercicio descrito al final del inciso 5.1.

n = 6 años
C = $210,000.00
S = $ 30,000.00
B = $180,000.00

$$a = (n - t) + 1 \qquad (63)$$

$$a = (6 - 4) + 1 = 3$$

El numerador del dígito del año 4 es 3.

$$b = \frac{n(n + 1)}{2} \qquad (64)$$

$$b = \frac{6(6 + 1)}{2} = 21$$

El denominador de los dígitos es 21.

$$Dt = (C - S)*(a/b) = B * \left(\frac{(n - t)+1}{b} \right) \qquad (65)$$

$$Dt = (210000-30000)*(3/21) = 180000 * \left(\frac{(6 - 4)+1}{21} \right) = 25714.28571$$

Entonces, la depreciación en el año 4 es de $25,714.29.

Tabla de depreciación

Años (*n*)	Dígitos (*a/b*)	Depreciación (*D*)	Depreciación acumulada (*Da*)	Valor en libros (*V*)
0	-----o-----	-----o-----	-----o-----	210,000.00
1	6/21	51,428.57	51,428.57	158,571.43
2	5/21	42,857.14	94,285.71	115,714.29
3	4/21	34,285.71	128,571.42	81,428.58
4	3/21	25,714.29	154,285.71	55,714.29
5	2/21	17,142.86	171,428.57	38,571.43
6	1/21	8,571.43	180,000.00	30,000.00

MÉTODO DEL FONDO DE AMORTIZACIÓN

Este método consiste en depositar, en un fondo, una cantidad igual en cada uno de los años. Toma en cuenta los intereses más las rentas (*R*) –o depreciaciones (*Dt*)– de cada uno de los periodos a que se hace referencia. La renta (*R*) se deposita con la finalidad de reemplazar el bien o activo al finalizar su vida útil.

Ejercicio 60. Apliquemos los datos del ejercicio descrito al final del inciso 5.1, con una tasa del 15% anual:

n = 6 años
C = $210,000.00
S = $ 30,000.00
B = $180,000.00

En primer lugar, debemos determinar la renta (*R*) con la cual llegaremos a acumular el valor o costo original, y a establecer las depreciaciones en cada uno de los años. Para esto, utilizaremos la fórmula de la renta de una anualidad ordinaria o vencida, en donde el monto sería la base de depreciación. De esta manera, al sumar el activo al final de su vida útil más el valor de salvamento tendremos el costo original, que es nuestro objetivo.

Para seguir este método, tomaremos en cuenta los elementos y datos que contiene una tabla de fondo de amortización, y después la adaptaremos a una tabla de depreciación.

Datos para la tabla de fondo de amortización:

$M = B = C - S = 210000 - 30000 = 180000$

$n = 6$ *años*

$i = 15\%$ *anual* $= 0.15$ *anual*

$R = ?$

$$R = \frac{M * i}{(1 + i)^n - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

$$R = \frac{180000*0.15}{(1 + 0.15)^6 - 1} = 20562.64318 = \$20,562.64 \text{ anuales}$$

Tabla de amortización

Años (*n*)	Renta (*R*)	Intereses (*I*)	Cantidad que se acumula al fondo (*CA*)	Fondo acumulado o monto (*M*)
1	20,562.64	-----o-----	20,562.64	20,562.64
2	20,562.64	3,084.40	23,647.04	44,209.68
3	20,562.64	6,631.45	27,194.09	71,403.77
4	20,562.64	10,710.57	31,273.21	102,676.98
5	20,562.64	15,401.55	35,964.19	138,641.17
6	20,562.64	20,796.17	41,358.81	179,999.98 *
	123,375.84	56,624.14	179,999.98 *	

*Por el redondeo de cifras no coincide con los $180,000.00 que corresponden a la base de depreciación.

Al obtener la tabla de fondo de amortización, le cambiamos los nombres a cada una de las columnas para poder utilizarlas en la nueva tabla de depreciación. La cuarta columna será la depreciación anual; y la quinta, la depreciación acumulada. Además, haremos una sexta columna para el valor en libros. Entonces, nuestra tabla de depreciación queda así:

Años (*n*)	Renta (*R*)	Intereses (*I*)	Depreciación (*D*)	Depreciación acumulada (*Da*)	Valor en libros (*V*)
0	-----o-----	-----o-----	-----o-----	-----o-----	210,000.00
1	20,562.64	-----o-----	20,562.64	20,562.64	189,437.36
2	20,562.64	3,084.40	23,647.04	44,209.68	165,790.32
3	20,562.64	6,631.45	27,194.09	71,403.77	138,596.23
4	20,562.64	10,710.57	31,273.21	102,676.98	107,323.02
5	20,562.64	15,401.55	35,964.19	138,641.17	71,358.83
6	20,562.64	20,624.14	41,358.81	*179,999.98	* 30,000.02

* Por el redondeo de cifras.

Unidad 6. Aplicaciones

6.1. Bonos y obligaciones
6.2. Valuación de una obligación
6.3. Prima y descuento

Objetivos particulares de la unidad

El alumno aprenderá a examinar, conceptuar y clasificar los bonos; además observará los métodos para calcular su precio, cotizaciones y rendimientos

UNIDAD 6. APLICACIONES

6.1. Bonos y obligaciones

Bono es un título de crédito emitido por un gobierno, a un plazo determinado y que gana intereses a pagar en intervalos de tiempo bien definidos. Por su parte, una obligación es un título de crédito emitido por una empresa, a un plazo determinado y con intereses a pagar en intervalos de tiempo bien definidos. Son utilizados para recabar dinero proveniente de inversionistas, con la obligación de pagarles un interés cada cierto periodo, además de reintegrarles el capital invertido al término del plazo estipulado.

6.2. Valuación de una obligación

Clasificación

a. *Nominativas.* Tienen el nombre del propietario.
b. *Al portador.* No poseen el nombre del propietario.
c. *Según el tipo de garantía con que se respaldan:*
    - *Fiduciaria.* Garantía constituida en un fideicomiso.
    - *Hipotecaria.* Avalada con hipoteca sobre bienes que son propiedad del emisor.
    - *Prendaria.* Garantizada por diversos bienes.
    - *Quirografaria.* Garantía que otorga el emisor, por su buena reputación, en cuanto a su cumplimiento con obligaciones contraídas.

d. *Por su manera de generar el interés (I):*
    - *Cupones.* Generalmente tienen impresa la fecha de vencimiento en la cual se deberán pagar los intereses.
    - Algunas obligaciones no presentan cupones, ya que los intereses que se generan son capitalizables y se pagan al vencimiento del documento.

- Se pueden encontrar otras obligaciones o bonos que no pagan intereses en ninguna ocasión. Este tipo de documentos se vende en un valor menor al nominal, es decir, con descuento (se les llama obligación o bonos de cupón cero).

6.3. Prima y descuento

Datos que contienen:

a. *Fecha de emisión.* Fecha cuando se colocan o emiten los documentos.

b. *Valor nominal.* Cantidad marcada en el documento. Representa el importe de dinero que da el inversionista al emisor, salvo que el título de crédito esté colocado con descuento.

c. *Valor de vencimiento o redención:*

- *A la par.* Cantidad que el emisor pagará al concluir el plazo pactado (es igual al valor nominal). Es decir, el documento pagará intereses al vencimiento de cada uno de los cupones que tuviera; por tanto, se paga sólo lo que el inversionista aportó al inicio.
- *Con premio o sobre la par.* El valor de redención es mayor que el valor nominal y ocurre cuando los intereses se capitalizan en cada cierto intervalo de tiempo, pagándose al final del plazo establecido.
- *Con descuento o bajo la par.* El valor de redención es menor que el nominal, y sucede cuando los documentos se pagan, al inicio del plazo, por un valor menor, es decir, con descuento.

d. *Fecha de vencimiento o redención.* Es la fecha en la cual se debe pagar el título (está estipulada en el mismo documento). Cuando se tiene una cláusula de redención anticipada, se indica que el documento se puede redimir antes de su vencimiento.

e. *Tasa de interés nominal.* Es la tasa utilizada para pagar los intereses del documento. Puede ser:

- *Fija.* No tiene variación a pesar de las condiciones del mercado.

- *Variable.* La tasa se ajusta periódicamente de acuerdo con las condiciones del mercado, atándose a una tasa de referencia (CETES o TIIE).
- *Real.* Sucede cuando el valor nominal se actualiza según la inflación, y sobre ese nuevo valor se calculan los intereses pactados en los cupones. Se ocupa para que el inversionista esté protegido ante la misma inflación.

Ejercicio 61. Una empresa emite obligaciones por $100 cada una, con un vencimiento a la par dentro de 6 años, y con pagos de interés mensual de 12% anual. Si una persona compra una de las obligaciones, ¿cuál será el importe de cada uno de los pagos a que tiene derecho? ¿Cuál será el interés total que recibirá? ¿Qué cantidad recibirá en total al finalizar el plazo?

C = $100.00

i = 12% anual capitalizable mensualmente = 0.12/12 = 0.01 mensual = 1% mensual

t = 6 años = 72 meses

I = ? cada mes

I = ? total

M = ?

I = Cit ....(1)

I = 100(0.01)(1) = 1 = $1.00 cada mes

I = 100(0.01)(72) = 72 = $72.00 en el total del plazo

M = C + I...(5)

M = 100 + 72 = 172 = $172.00

Ejercicio 62. Cierta persona adquiere bonos con un valor nominal de $1000.00 cuya redención es de 15% sobre el valor nominal (sobre la par o con premio), ¿cuál es el valor de redención?

C = $1,000.00

i = 15% = 0.15

M = ?

M = C + Cit = C (1+ it)..(6)

*M = 1000 (1 + 0.15*1) = 1150 = $1,150.00*

Ejercicio 63. ¿Qué cantidad se paga por una obligación cuyo valor nominal es de $10,000.00 y se redime en 12% menos de su valor nominal (bajo la par o con descuento)?

M = $10,000.00

d = 12% = 0.12

C = ?

Dc = Mdt..(10)

D = 10000(0.12)(1) = 1200 = $1,200.00

C = M – Dc ....(14)

C = 10000 – 1200 = 8800 = $8,800.00