UNIDAD IV. ANUALIDADES

4.1. Definición y clasificación de las anualidades

Anualidad: conjunto de pagos iguales realizados a intervalos iguales de tiempo.

No necesariamente se refiere a periodos anuales, se ha conservado el nombre de anualidad por costumbre en dichas operaciones; pero ejemplos de anualidades son:

Pagos mensuales por la renta de un local o departamento
Cobro quincenal de sueldos
Pagos anuales a las pólizas de seguro

Intervalo o periodo de pago: tiempo que transcurre entre un pago y otro.

Plazo: Tiempo que trascurre entre el primer pago y el último.

Tipos de anualidades.
La variación en los elementos de las anualidades hace que existan diferentes tipos de ellas, por lo tanto se clasifican de la siguiente manera.

Criterio	Tipo	Descripción
Tiempo (fecha de inicio y fin)	Ciertas	*Anualidades ciertas.* Sus fechas son fijas y se estipulan de antemano. Ejemplo: al realizar una compra a crédito se fija tanto la fecha en que se debe hacer el primer pago, como la fecha para efectuar el último pago.
	Contingentes	*Anualidad contingente.* La fecha del primer pago, la fecha del último pago, o ambas no se fijan de antemano. Ejemplo: Una renta vitalicia que se obliga a un cónyuge tras la muerte del otro. El inicio de la renta se da al morir el cónyuge, que no se sabe exactamente cuándo.
Intereses	Generales	*Anualidad general.* Son aquellas que el periodo de pago no coincide con el periodo de capitalización. Ejemplo: el pago de una renta semestral con intereses al 30% anual capitalizable trimestralmente.
	Simples	*Anualidad simple.* Cuando el periodo de pago coincide con el de capitalización de los intereses. Ejemplo: el pago de una renta mensual con intereses al 18% capitalizable mensualmente.
Pagos	Vencidas	*Anualidad vencida.* Las anualidades vencidas u ordinarias son aquellas en que los pagos se efectúan a su vencimiento, es decir, al final de cada periodo.
	Anticipadas	*Anticipadas*. Los pagos se efectúan al principio de cada periodo.
Iniciación	Inmediatas	*Anualidades inmediatas*. Es el caso más común. La realización de los cobros o pagos tiene lugar en al periodo inmediatamente siguiente a la formalización del trato. Ejemplo: se compra un artículo a crédito hoy, que se va a pagar con mensualidades, la primera de las cuales habrá de realizarse en ese momento o un mes después de adquirida la mercancía (puede ser así, anticipada o vencida).
	Diferidas	*Diferidas*. La realización de los cobros o pagos se hace tiempo después de la formalización del trato (se pospone). Ejemplo: Se adquiere hoy un artículo a crédito para pagar con abonos mensuales; el primer pago habrá de hacerse 6 meses después de adquirida la mercancía.

Dado que entre cada tipo de criterio de clasificación (tiempo, intereses, pagos, iniciación) no son mutuamente excluyentes; la diversidad de anualidades puede ser de la siguiente manera:

- Anualidades
  - Simples
    - Ciertas
      - Vencidas
        - Inmediatas
        - Diferidas
      - Anticipadas
        - Inmediatas
        - Diferidas
    - Contingentes
      - Vencidas
        - Inmediatas
        - Diferidas
      - Anticipadas
        - Inmediatas
        - Diferidas
  - Generales
    - Ciertas
      - Vencidas
        - Inmediatas
        - Diferidas
      - Anticipadas
        - Inmediatas
        - Diferidas
    - Contingentes
      - Vencidas
        - Inmediatas
        - Diferidas
      - Anticipadas
        - Inmediatas
        - Diferidas

Villalobos, J. L. (2001). *Matemáticas financieras*. Guadalajara: Prentice Hall.

Actividad 4.1. Resumen anualidades. Realiza un resumen sobre el tema de las anualidades, el cual debe incluir la descripción de las anualidades.

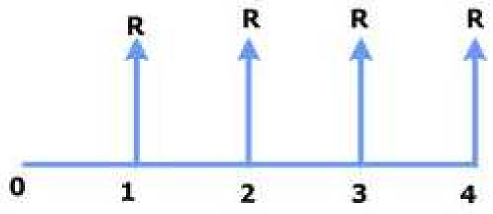
Entrega tus resultados en forma de RESUMEN, siguiendo las rúbricas indicadas en la dirección: http://marcelrzm.comxa.com/Rubricas/Rubricas.htm

Puede enviar el documento final por correo electrónico a las siguientes direcciones: marcelrzm@hotmail.com; marcelrzm@hotmail.com; marcelrzm@yahoo.com.mx y marcelrz2002@yahoo.com.mx

Recuerde enviar dicho correo con copia a usted mismo y en asunto colocar “4.1. Resumen anualidades”.

Anualidades anticipadas

Las anualidades vencidas son aquellas que sus pagos iguales ocurren al finalizar cada periodo, un diagrama de flujo de cada de dichas anualidades se muestra a continuación:



La ecuación que relaciona un valor futuro o Monto (M) con el valor del pago anualizado (R), una tasa de interés (i) además de una cantidad determinada de periodos de tiempo (n) es:

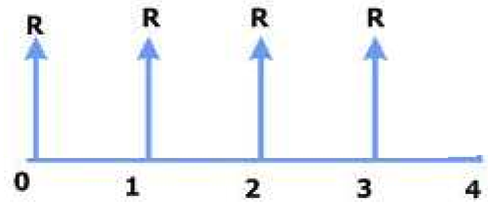
Para anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas:

$$M=R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]$$

La ecuación que en lugar del Monto relaciona el capital (C) o valor presente, con el pago anualizado (R), una tasa de interés (i) además de una cantidad determinada de periodos de tiempo (n) es:

$$C=R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Las anualidades anticipadas ocurren al inicio de cada periodo de tiempo, el diagrama de flujo de cada de estas anualidades es el siguiente:



Donde R representa cada pago y los números en el eje horizontal son los periodos de tiempo transcurridos.

La ecuación que relaciona un valor futuro o Monto (M) con el valor del pago anualizado (R), una tasa de interés (i) además de una cantidad determinada de periodos de tiempo (n) es:

Para anualidades simples, ciertas, anticipadas e inmediatas:

$$M=R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right](1+i)$$

Esta ecuación equivale a la usada para anualidades vencidas, solo que se le añade un periodo (1+i) ya que el monto total se capitaliza un periodo más.

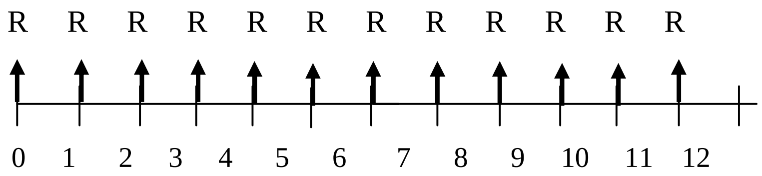
En el caso del capital la ecuación queda:

$$C=R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right] \qquad M=R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right](1+i)$$

Ejemplo 1. Un trabajador deposita \$250 en una cuenta de ahorros al inicio de cada mes; si dicha cuenta paga 1.3% de interés mensual capitalizable al mes ¿Cuánto habrá ahorrado al cabo de un año?

Solución: se realiza el diagrama de flujo de caja para visualizar los pagos:

R = \$250



Entonces los datos son:
R = \$250;
n = 12,
i = 1.3% mensual capitalizable al mes

Cuando se cumplan los 12 periodos mensuales se cumple el año; por lo cual la sustitución de la ecuación queda de la siguiente forma:

$$M=R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right](1+i)$$

$$M=250\left[\frac{(1+0.013)^{12}-1}{0.013}\right](1+0.013)=\$3,265.99$$

Ejemplo 2. Determine el valor del monto al cual equivalen 6 pagos anticipados semestrales de \$14,500 si el interés es del 19% anual capitalizable semestralmente. **Solución:** Los datos son:
M = ?
n = 6
R = \$14,500
i = 19% anual capitalizable al semestre

$$M=R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right](1+i)$$

$$M=\$14,500\left[\frac{\left(1+\frac{0.19}{2}\right)^6-1}{\frac{0.19}{2}}\right]\left(1+\frac{0.19}{2}\right)=\$120,968.40$$

Ejemplo 3. Un comerciante alquila un local para su negocio y acuerda pagar $2,750 de renta por anticipado. Como desearía liberarse del compromiso mensual, decide proponer una renta anual anticipada. Si los intereses son del 15.6% anuales convertibles mensualmente ¿Cuánto debería ser la renta anual anticipada?

Solución:
C=?
R=$2,750
i = 15.6% anual capitalizable al mes
n = 12 meses

$$C=R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

$$C=\$2{,}750\left[1+\frac{1-\left(1+\frac{0.156}{12}\right)^{-12+1}}{\frac{0.156}{12}}\right]=\$30{,}767.60$$

Ejemplo 4. Un trabajador debe pagar $90,000 dentro de 2 años, para lo cual desea hacer 12 depósitos bimestrales en una cuenta de inversión que rinde 4.2% bimestral ¿Cuál debe ser el valor de los depósitos si hoy realiza el primero?

Datos: n = 12 i = 0.042 bimestral M = $90,000 R = ?
Solución:

$$M=R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right](1+i) \quad \text{Despejando queda: } R=M\left[\frac{1}{(1+i)}\left(\frac{i}{(1+i)^n-1}\right)\right]$$

$$R=M\left[\frac{1}{(1+i)}\left(\frac{i}{(1+i)^n-1}\right)\right]=\$90{,}000\left[\frac{1}{(1+0.042)}\left(\frac{0.042}{(1+0.042)^{12}-1}\right)\right]$$ Pue

$$R=\$5{,}682.64$$

des ver la solución de este ejemplo en video:
http://www.youtube.com/watch?v=Y0Sv1FH1LDc

Ejemplo 5. En un almacén se vende un mueble por $4,600 al contado o mediante pagos mensuales anticipados de $511.69; si el interés es del 29.4% convertible mensualmente ¿Cuántos pagos se requieren hacer?

Solución:
C = $4,600
R=$511.69
i = 29.4% anual convertible mensualmente.
n = ?

Se requiere despejar el valor de "n" de la ecuación:

$$C=R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

$$C=R\frac{i+1-(1+i)^{-n+1}}{i}=C$$

$$\frac{i+1-(1+i)^{-n+1}}{i}=\frac{C}{R}$$

$$i+1-(1+i)^{-n+1}=\frac{iC}{R}$$

$$-(1+i)^{-n+1}=\frac{iC}{R}\text{-i-1}$$

$$(1+i)^{-n+1}=i+1-\frac{iC}{R}$$

$$\text{Log}\left[(1+i)^{-n+1}\right]=\text{Log}\left[i+1-\frac{iC}{R}\right]$$

$$(-n+1)\,\text{Log}(1+i)=\text{Log}\left[i+1-\frac{iC}{R}\right]$$

$$-n+1=\frac{\text{Log}\left[i+1-\frac{iC}{R}\right]}{\text{Log}(1+i)}$$

$$-n=\frac{\text{Log}\left[i+1-\frac{iC}{R}\right]}{\text{Log}(1+i)}-1$$

$$n=1-\frac{\text{Log}\left[i+1-\frac{iC}{R}\right]}{\text{Log}(1+i)}$$

$$n=1-\frac{\text{Log}\left[\left(\frac{0.294}{12}\right)+1-\frac{\left(\frac{0.294}{12}\right)\$4{,}600}{\$511.69}\right]}{\text{Log}\left[1+\left(\frac{0.294}{12}\right)\right]}=1+9=10$$

Por lo tanto deberían ser 10 pagos.

$$n=1-\frac{\text{Log}\left[i+1-\frac{iC}{R}\right]}{\text{Log}(1+i)}$$

La solución de este ejercicio está disponible en:
http://www.youtube.com/watch?v=XpY0AD24aUQ

Actividad 4.2. Anualidades anticipadas. Realiza los siguientes ejercicios:

1.- Se abre una cuenta bancaria con un depósito inicial de $18,500 y después deposita la misma cantidad por cada mes transcurrido; ¿Cuánto logra acumular en dicha cuenta en un año si se le paga una tasa de interés de 18.24% anual capitalizable mensualmente?

2.- Realice el mismo problema anterior, pero el depósito inicial cambia ahora a $35,000.

3.- ¿Cuántos pagos anticipados de $700 se requieren mensualmente para alcanzar un monto acumulado de $20,000 si el dinero rinde:
a) 3% de interés anual capitalizable mensualmente
b) 3% mensual capitalizable mensualmente.

4.- ¿Cuántos pagos anticipados de $700 se requieren mensualmente para cubrir una deuda inicial de $200,000 si el dinero rinde:
a) 3% de interés anual capitalizable mensualmente
b) 3% mensual capitalizable mensualmente.

5.- ¿Cuál es la tasa de interés que se paga en la compra de una computadora que se ofrece mediante 96 pagos anticipados quincenales de $285 pesos si su valor de contado es de $20,000?

6.- Para un proyecto de construcción se requieren $15,000 al inicio de cada mes durante 6 meses que dura la construcción. ¿Cuánto se debe depositar al comienzo de las obras en un banco que paga una tasa de interés del 30% anual compuesto mensualmente?

7.- ¿Cuánto se acumula en una cuenta de ahorros si se realizan 20 depósitos quincenales vencidos de $500 y la tasa de interés es del 34.5% quincenal?

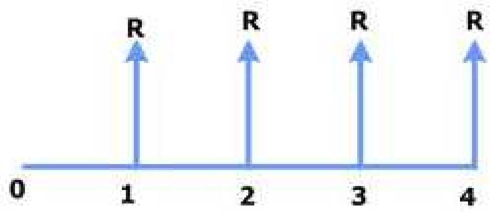
8.- Cuanto debe depositar una persona al inicio de cada mes durante 20 meses para que se disponga de $18,000 al final del plazo, suponiendo que se gana una tasa de interés del 26% anual capitalizable semanalmente.

Entrega tus resultados en forma de PRÁCTICA DE EJERCICIOS, siguiendo las rúbricas indicadas en la dirección:
http://marcelrzm.comxa.com/Rubricas/Rubricas.htm
Puede enviar el documento final por correo electrónico a las siguientes direcciones: marcelrzm@hotmail.com; marcelrzm@hotmail.com; marcelrzm@yahoo.com.mx y marcelrz2002@yahoo.com.mx

Recuerde enviar dicho correo con copia a usted mismo y en asunto colocar “4.2. Anualidades anticipadas”.

Anualidades vencidas

Las anualidades vencidas son aquellas que sus pagos iguales ocurren al finalizar cada periodo, un diagrama de flujo de cada de dichas anualidades se muestra a continuación:



La ecuación que relaciona un valor futuro o Monto (M) con el valor del pago anualizado (R), una tasa de interés (i) además de una cantidad determinada de periodos de tiempo (n) es:

Para anualidades simples, ciertas, vencidas e inmediatas:

$$M=R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]$$

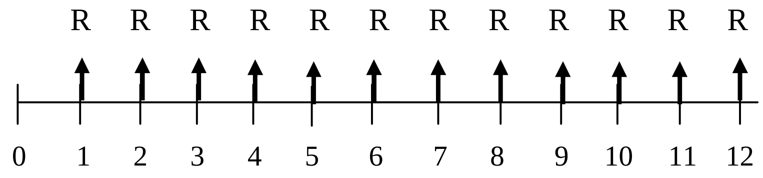
La ecuación que en lugar del Monto relaciona el capital (C) o valor presente, con el pago anualizado (R), una tasa de interés (i) además de una cantidad determinada de periodos de tiempo (n) es:

$$C=R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Ejemplo 1. Un trabajador deposita $250 en una cuenta de ahorros al FINAL de cada mes; si dicha cuenta paga 1.3% de interés mensual capitalizable al mes ¿Cuánto habrá ahorrado al cabo de un año?

Solución: se realiza el diagrama de flujo de caja para visualizar los pagos:

R = $250



Entonces los datos son:
R = $250;
n = 12,
i = 1.3% mensual capitalizable al mes

Cuando se cumplan los 12 periodos mensuales se cumple el año; por lo cual la sustitución de la ecuación queda de la siguiente forma:

$$M=R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]$$

$$M=250\left[\frac{(1+0.013)^{12}-1}{0.013}\right]=\$3,224.07$$

Ejemplo 2. Determine el valor del monto al cual equivalen 6 pagos semestrales de $14,500 que ocurren al final de cada semestre si el interés es del 19% anual capitalizable semestralmente.

Solución: Los datos son:
M = ?
n = 6
R = $14,500
i = 19% anual capitalizable al semestre

$$M=R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$$

$$M=\$14{,}500\left[\frac{\left(1+\frac{0.19}{2}\right)^6-1}{\frac{0.19}{2}}\right]=\$110,473.43$$

Ejemplo 3. Un comerciante alquila un local para su negocio y acuerda pagar un servicio privado de vigilancia en $2,750 de renta vencida. Como desearía liberarse del compromiso mensual, decide proponer una renta anual anticipada. Si los intereses son del 15.6% anuales convertibles mensualmente ¿Cuánto debería ser la renta anual que debería pagar al inicio de cada año? **Solución:**
C=?
R=$2,750
i = 15.6% anual capitalizable al mes
n = 12 meses

$$C=R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$C=\$2{,}750\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.156}{12}\right)^{-12}}{\frac{0.156}{12}}\right]=\$30,372.75$$

Ejemplo 4. Un trabajador debe pagar $90,000 dentro de 2 años, para lo cual desea hacer 12 depósitos bimestrales en una cuenta de inversión que rinde 4.2% bimestral ¿Cuál debe ser el valor de los depósitos si el primer pago se hace dentro de un bimestre?
Solución:
n = 12
i = 0.042 bimestral
M = $90,000
R = ?

$$M=R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \quad \text{Despejando queda: } R=M\left[\frac{i}{(1+i)^n-1}\right]$$

$$R=M\left[\frac{i}{(1+i)^n-1}\right]=\$90{,}000\left[\frac{0.042}{(1+0.042)^{12}-1}\right]$$

$$R=\$5,921.31$$

Ejemplo 5. En un almacén se vende un mueble por $4,600 al contado o mediante pagos mensuales vencidos de $524.23; si el interés es del 29.4% convertible mensualmente ¿Cuántos pagos se requieren hacer?

Solución:
C = $4,600
R=$524.23
i = 29.4% anual convertible mensualmente.
n = ?

Se requiere despejar el valor de "n" de la ecuación:

$$C=R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$C=R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=C$$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{C}{R}$$

$$1-(1+i)^{-n}=\frac{iC}{R}$$

$$-(1+i)^{-n}=\frac{iC}{R}-1$$

$$(1+i)^{-n}=1-\frac{iC}{R}$$

$$\text{Log}\left[(1+i)^{-n}\right]=\text{Log}\left[1-\frac{iC}{R}\right]$$

$$-n\text{Log}(1+i)=\text{Log}\left[1-\frac{iC}{R}\right]$$

$$-n=\frac{\text{Log}\left[1-\frac{iC}{R}\right]}{\text{Log}(1+i)}$$

$$-n=\frac{\text{Log}\left[1-\frac{iC}{R}\right]}{\text{Log}(1+i)}$$

$$n=-\frac{\text{Log}\left[1-\frac{iC}{R}\right]}{\text{Log}(1+i)}$$

$$n=-\frac{\text{Log}\left[1-\frac{\left(\frac{0.294}{12}\right)\$4,600}{\$524.23}\right]}{\text{Log}\left[1+\left(\frac{0.294}{12}\right)\right]}=10$$

Por lo tanto deberían ser 10 pagos.

Quedando el despeje de "n" para anualidades vencidas cuando se relacionan los pagos "R" con el capital "C":

$$n=-\frac{\text{Log}\left[1-\frac{iC}{R}\right]}{\text{Log}(1+i)}$$

Ejemplo 6. Una persona desea obtener $500,000 mediante depósitos mensuales de $1,000 en una cuenta bancaria que paga 1.25% mensual; ¿Cuántos pagos o periodos mensuales se requieren para alcanzar dicha suma si el primer depósito lo hace el dentro de un mes a partir del día de hoy?

Solución:

M = $500,000

R=$1,000

i = 1.25% mensual

n = ?

$$M=R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]$$

Ahora hay que despejar el valor de "n" de la ecuación mostrada.

EL ALUMNO PROPONE LA SOLUCIÓN A ESTE PROBLEMA.

Puede confirmar su solución en el siguiente video:
http://www.youtube.com/watch?v=Bov1VN8HH5k

Actividad 4.3. Anualidades vencidas. Realiza los siguientes ejercicios:

1.- Para un proyecto de construcción se requieren $150,000 al FINAL de cada mes durante 6 meses que dura la construcción. ¿Cuánto se debe depositar al comienzo de las obras en un banco que paga una tasa de interés del 23.7% anual compuesto mensualmente?

2.- ¿Cuanto se acumula en una cuenta de ahorros si se realizan 20 depósitos quincenales ANTICIPADOS de $500 y la tasa de interés es del 34.5% quincenal?

3.- Cuanto debe depositar una persona al final de cada mes durante 20 meses para que se disponga de $120,000 al final del plazo, suponiendo que se gana una tasa de interés del 26% anual capitalizable semanalmente.

4.- Se abre una cuenta bancaria en la que se depositan $80,500 al final de cada mes transcurrido; ¿Cuánto logra acumular en dicha cuenta en un año si se le paga una tasa de interés de 18.24% anual capitalizable mensualmente?

5.- Realice el mismo problema anterior, pero los depósitos cambian ahora a $38,000.

6.- ¿Cuántos pagos vencidos de $700 se requieren mensualmente para alcanzar un monto acumulado de $15,000 si el dinero rinde:
a) 2.97% de interés anual capitalizable mensualmente
b) 2.97% mensual capitalizable mensualmente.

7.- ¿Cuántos pagos vencidos de $700 se requieren mensualmente para cubrir una deuda inicial de $150,000 si el dinero rinde:
a) 2.97% de interés anual capitalizable mensualmente
b) 2.97% mensual capitalizable mensualmente.

8.- ¿Cuál es la tasa de interés que se paga en la compra de una computadora que se ofrece mediante 96 pagos vencidos quincenales de $285 pesos si su valor de contado es de $20,000?

Entrega tus resultados en forma de PRÁCTICA DE EJERCICIOS, siguiendo las rúbricas indicadas en la dirección:
http://marcelrzm.comxa.com/Rubricas/Rubricas.htm
Puede enviar el documento final por correo electrónico a las siguientes direcciones: marcelrzm@hotmail.com; marcelrzm@hotmail.com; marcelrzm@yahoo.com.mx y marcelrz2002@yahoo.com.mx

Recuerde enviar dicho correo con copia a usted mismo y en asunto colocar “4.3. Anualidades vencidas”.

Rentas equivalentes

Este concepto suele emplearse para reemplazar un conjunto de pagos periódicos por otro que es equivalente pero con diferente frecuencia.

Ejemplo 1. Que renta semestral anticipada sustituye los pagos mensuales anticipados de $500 con intereses del 30% anual capitalizable o compuesto mensualmente.

Solución: Dado que la renta semestral anticipada ocurre de inmediato; los pagos mensuales de 6 meses deben ser iguales a un solo pago semestral anticipado (que ocurre de inmediato).

El pago semestral anticipado es equivalente entonces al valor presente de los pagos mensuales anticipados.

Entonces los datos son:
R= $500 pago mensual anticipado
i = 0.3 anual capitalizable al mes
n = 6 periodos mensuales (dado que 1 semestre = 6 meses)

$$C = R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

$$C = \$500\left[1+\frac{1-(1+0.3/12)^{-6+1}}{0.3/12}\right] = \$2,822.91$$

RESPUESTA: Se requieren pagos semestrales anticipados de $2,822.91 para sustituir los pagos mensuales anticipados de $500 bajo una tasa del 30% anual capitalizable al mes

Este ejemplo se encuentra resuelto en video, para verlo da clic en el siguiente link: http://www.youtube.com/watch?v=r2NneGEej5g

Ejemplo 2. Una persona va a viajar al extranjero y desea pagar la renta mensual anticipada de dos años; el pago mensual por renta es de $2,750 bajo una tasa del 32.64% anual capitalizable mensualmente.

Solución: es similar al caso anterior, si va a realizar un pago anticipado de las rentas mensuales de 2 años es equivalente a calcular el valor presente de las 24 rentas (2 años) de forma anticipada.

Entonces los datos son:
R = $2,750 renta mensual anticipada
i = 32.64% anual capitalizable mensualmente
n = 24 periodos mensuales (2 años)

$$C = R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

$$C = \$2,750\left[1+\frac{1-(1+0.3264/12)^{-24+1}}{0.3264/12}\right] = \$49,315.02$$

RESPUESTA: Se requiere un pago anticipado de $49,315.02 para sustituir los pagos mensuales anticipados de $2,750 durante el lapso de dos años bajo una tasa del 32.64% anual capitalizable al mes.

Ejemplo 3. Para pagos de $2,400 mensuales vencidos con intereses del 21.6% anual capitalizable mensualmente; determine lo siguiente:

a) Cual deberá ser la renta semestral vencida equivalente.
b) Cual deberá ser la renta semestral anticipada equivalente.

Solución: Los datos de las rentas mensuales son:
R = $2,400 mensuales vencidos
i = 21.6% anual capitalizable al mes.
n = 6 periodos mensuales (ya que un semestre tiene 6 meses).

Para dar respuesta al inciso: a) Cual deberá ser la renta semestral vencida equivalente. Debemos visualizar que la renta semestral VENCIDA es equivalente al valor futuro de los pagos mensuales vencidos; por lo tanto se usa la siguiente ecuación:

$$M=R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]$$

$$M=\$2,400\left[\frac{(1+0.216/12)^{6}-1}{0.216/12}\right]=\$15,063.76$$

RESPUESTA INCISO A: Se requiere pagar $15,063.76 al final de 6 meses lo cual es equivalente a pagos mensuales vencidos de $2,400 bajo la tasa del 21.6% capitalizable al mes.

Para dar respuesta al inciso b) Cual deberá ser la renta semestral anticipada equivalente; como es renta semestral ANTICIPADA es nuevamente equivalente a calcular el valor presente de los pagos mensuales vencidos.

$$C=R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$C=\$2,400\left[\frac{1-(1+0.216/12)^{-6}}{0.216/12}\right]=\$13,534.64$$

RESPUESTA INCISO B: Se requiere pagar $13,534.64 al inicio de los 6 meses, lo cual es equivalente a pagos mensuales vencidos de $2,400 bajo la tasa del 21.6% capitalizable al mes.

El ejemplo 3 revisado anteriormente se encuentra resuelto en video, da clic aquí para verlo: http://www.youtube.com/watch?v=myyaCrREmv4

LOS SIGUIENTES EJERCICIOS SERÁN REALIZADOS POR LOS ALUMNOS DURANTE LA CLASE BAJO SUPERVISIÓN DEL PROFESOR:

Anticipadas: $M=R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right](1+i)$ $\quad C=R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$

Ejemplo 4. Para sustituir los pagos mensuales anticipados de $500 con intereses del 30% anual capitalizable o compuesto mensualmente; determine:

a) Renta bimestral anticipada equivalente
b) Renta bimestral vencida equivalente

INCISO A)	=500*(1+(1-(1+0.3/12)^(-2+1))/(0.3/12))
INCISO B)	=500*(((1+0.3/12)^2-1)/(0.3/12))*(1+0.3/12)

INCISO A)	$ 987.80
INCISO B)	$ 1,037.81

Formulario anualidades vencidas:

$$M=R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right] \qquad C=R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Ejemplo 5. Una persona va a viajar al extranjero y desea pagar de inmediato o antes de irse, la renta mensual VENCIDA de dos años; el pago mensual por renta es de $2,750 bajo una tasa del 32.64% anual capitalizable mensualmente.

=2750*(1-(1+0.3264/12)^(-2*12))/(0.3264/12)
$ 48,009.18

Ejemplo 6. Para pagos de $2,400 mensuales vencidos con intereses del 21.6% anual capitalizable mensualmente; determine lo siguiente:

a) Cual deberá ser la renta CUATRIMESTRAL vencida equivalente.
b) Cual deberá ser la renta BIMESTRAL anticipada equivalente.

INCISO A)	$ 9,862.32		
INCISO B)	$ 4,673.44		

Actividad 4.4. Rentas equivalentes. Realiza los siguientes ejercicios:

1.- Para un proyecto de construcción se deben realizar pagos semestrales vencidos; determine el valor de dichos pagos que sean equivalentes a una tasa del 30% anual capitalizable mensualmente y a:
a) pagos mensuales anticipados de $10,000
b) pagos mensuales vencidos de $10,000

2.- Para un pago vencido de $150,000 realizado cada semestre; determine cuál debe ser el valor de los pagos mensuales bajo una tasa del 10% anual capitalizable mensualmente si dichos pagos mensuales ocurren de forma:
a) anticipada
b) vencida

3.- Para un proyecto de construcción se deben realizar pagos TRIMESTRALES vencidos; determine el valor de dichos pagos que sean equivalentes a una tasa del 30% anual capitalizable mensualmente y a:
a) pagos mensuales anticipados de $10,000
b) pagos mensuales vencidos de $10,000

4.- Para un pago vencido de $150,000 realizado cada TRIMESTRE; determine cuál debe ser el valor de los pagos mensuales bajo una tasa del 10% anual capitalizable mensualmente si dichos pagos mensuales ocurren de forma:
a) anticipada
b) vencida

Entrega tus resultados en forma de PRÁCTICA DE EJERCICIOS, siguiendo las rúbricas indicadas en la dirección: http://marcelrzm.comxa.com/Rubricas/Rubricas.htm

Puede enviar el documento final por correo electrónico a las siguientes direcciones: marcelrzm@hotmail.com; marcelrzm@hotmail.com; marcelrzm@yahoo.com.mx y marcelrz2002@yahoo.com.mx

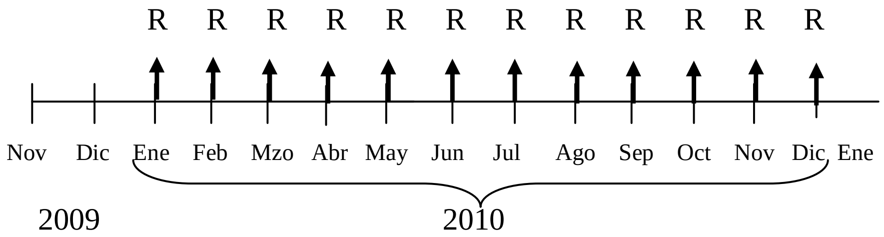
Recuerde enviar dicho correo con copia a usted mismo y en asunto colocar “4.4. Rentas equivalentes”.

Anualidades diferidas

Las anualidades diferidas son aquellas en los que el inicio de los pagos periódicos se pospone para un tiempo posterior a la formalización de la operación. No se requieren formulas nuevas a las ya vistas, solo hacer los ajustes correspondientes a los plazos específicos de cada ejemplo o problema.

Ejemplo 1. Una tienda departamental con su lema "compre ahora y pague después" está vendiendo un escritorio por el cual se deben realizar 12 pagos mensuales de $180 a partir del 1ro de enero del 2010 bajo una tasa del 36% anual capitalizable al mes. Si el escritorio se compra el 1ro de noviembre de 2009 determine el valor presente o de contado del artículo.

Solución: El diagrama de flujo de caja puede quedar de la siguiente forma.
R = $ 180
i = 36% anual capitalizable mensualmente
n = 12 pagos mensuales



Una estrategia para calcular el valor del artículo para el 1ro de noviembre de 2009 es determinar el valor presente de dichos pagos periódicos, si se considera que son vencidos (es decir que inician un mes despúes) habremos calculado el valor presente para el 1ro de diciembre de 2009.

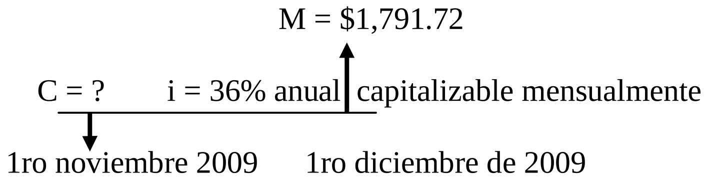
Entonces el valor presente de los pagos mensuales vencidos se calculan con la ecuación:

$$C=R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$C=\$180\left[\frac{1-(1+0.36/12)^{-12}}{0.36/12}\right]=\$1{,}791.72$$

Ahora para calcular el valor presente al 1ro de noviembre de 2009 se requiere calcularlo como si el valor de $1,791.72 fuera un monto o valor futuro y el capital buscado se encuentre un periodo mensual anterior.

En un diagrama de flujo de caja lo anterior se expresa de la siguiente manera:



Para calcular el valor presente al 1ro de noviembre de 2009 se usa la formula de interés compuesto y se despeja "C" posteriormente se sustituyen los datos de la siguiente forma:

$$M=C(1+i)^n$$

$$C=\frac{M}{(1+i)^n}=\frac{\$1{,}791.72}{(1+0.36/12)^1}=\$1{,}739.53$$

RESPUESTA: El valor del artículo al 1ro de noviembre de 2009 es de $1,739.53 bajo una tasa de interés del 36% anual capitalizable al mes con 12 pagos mensuales que inician el 1ro de enero de 2010.

Ejemplo 2. Calcular el valor actual de una renta semestral de $6,000 durante 7 años si el primer pago semestral se realiza dentro de 3 años y el interés es de 17% semestral capitalizable al semestre.

Solución: los datos del problema son los siguientes:

R = $6,000 pagos semestrales

n = 14 periodos semestrales (7 años)

i = 17% semestral capitalizable al semestre

Si consideramos los pagos como anticipados podemos calcular el valor presente de los pagos como primer paso.

$$C=R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]=\$6,000\left[1+\frac{1-(1+0.17)^{-14+1}}{0.17}\right]=\$36,709.67$$

Posteriormente pasar esa cantidad que esta 3 años en el futuro a valor presente:

El factor $(1+0.17)^6$ se puede pasar al numerador con exponente negativo

$$M=C(1+i)^n$$

$$C=\frac{M}{(1+i)^n}=\frac{\$36,709.67}{(1+0.17)^{3*2}}=\$36,709.67(1+0.17)^{-6}=\$14,310.85$$

Nótese que en el problema estamos obligados a usar dos veces la letra “C” como capital para dos valores diferentes; es por eso que algunos autores para evitar confusión proponen el siguiente procedimiento:

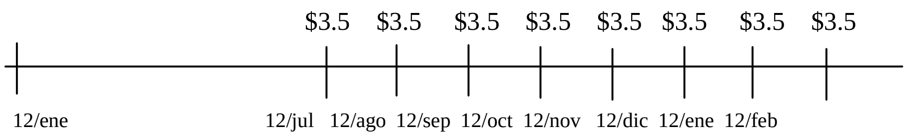
$$C=\underbrace{\$6,000\left[1+\frac{1-(1+0.17)^{-14+1}}{0.17}\right]}_{\text{Valor equivalente de los 6 pagos anticipados al momento que inician}}\underbrace{(1+0.17)^{-6}}_{\text{Factor que pasa el valor del dinero 6 periodos semestrales atrás}}=\$14,310.85$$

RESPUESTA: $14,310.85 es el valor presente de una renta semestral de $6,000 durante 7 años, si el primer pago inicia en 3 años bajo una tasa del 17% semestral capitalizable al semestre.

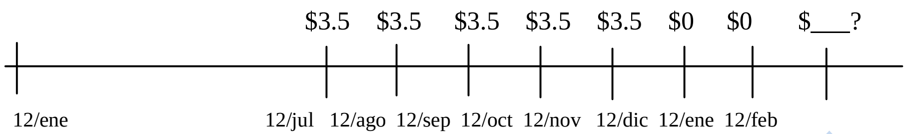
Ejemplo 3. El 12 de enero un deudor acuerda pagar una deuda mediante 8 pagos mensuales de $3,500 haciendo el primero de ellos el 12 de julio del mismo año; si después de realizar el 5to pago no realiza los dos pagos siguientes; determine cuál es el valor del 8vo pago que debe realizar para cubrir completamente su deuda si el interés se calcula como 21.6% con capitalización mensual.

Solución: conviene hacer un diagrama de flujo de caja para este problema:

Se había pactado (cifras en miles de pesos para ahorrar espacio):



Pero lo que realmente ocurrió fue:



¿Cuánto se debe pagar en esta fecha para compensar los pagos que no se han hecho?

Opción 1: Pasar los pagos faltantes al futuro:

$$M=\$3,500\left(1+\frac{0.216}{12}\right)^2+\$3,500\left(1+\frac{0.216}{12}\right)^1+\$3,500=\$10,690.13$$

Opción 2. Calcular la diferencia que le falta pagar al 12 de febrero:
Se calcula con la ecuación de monto para anualidades vencidas, nótese que en anualidades vencidas el último pago coincide con el valor del monto.

Ultimo pago = Total que debe pagar - Total que ya se ha pagado

5 pagos vencidos, julio, agosto, septiembre, octubre y noviembre

$$M = R\left[\frac{(1+i)^8-1}{i}\right] - R\left[\frac{(1+i)^5-1}{i}\right](1+i)^3$$

8 pagos vencidos, la fecha en la que se calcula el monto coincide con el último pago, es decir el 12/feb.
Esta fórmula calcula EL TOTAL DE LA DEUDA

5 pagos vencidos, julio, agosto, septiembre, octubre y noviembre PASADOS AL FUTURO 3 PERIODOS MENSUALES para que el dinero este valuado al 12/feb.

Sustituyendo los valores tenemos:

$$M=\$3{,}500\left[\frac{\left(1+\frac{0.216}{12}\right)^8-1}{\frac{0.216}{12}}\right]-\$3{,}500\left[\frac{\left(1+\frac{0.216}{12}\right)^5-1}{\frac{0.216}{12}}\right](1+i)^3$$

$$M = \$29{,}828.95-\$19{,}138.82=\$10{,}690.13$$

RESPUESTA: $10,690.13 es el valor que debe pagar el 12/feb para compensar los 3 últimos pagos que aún no realiza.

Ejemplo 4. El 14 de mayo del año 2008 se depositaron $100,000 en un fondo de inversiones con el objeto de retirar 10 mensualidades a partir del 14 de febrero del año 2010; si los intereses que se ganan son de 17.52% capitalizable al mes, determine el valor de las mensualidades que se podrán retirar.

Solución: Los datos del problema son:
C = $100,000 el 14 de mayo de 2008
10 pagos mensuales
Meses entre el 14/mayo/2008 al 14/febrero/2010: 21 meses.
NOTA: Puede calcularse a mano con restas visto en el tema 2.3:
http://marcelrzm.comxa.com/MateFin/23TiempoExactoYAprox.pdf

También puede calcularse en EXCEL de la siguiente forma:

Calcular el número de meses entre dos fechas

Para realizar esta tarea, use las funciones **MES** y **AÑO** como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

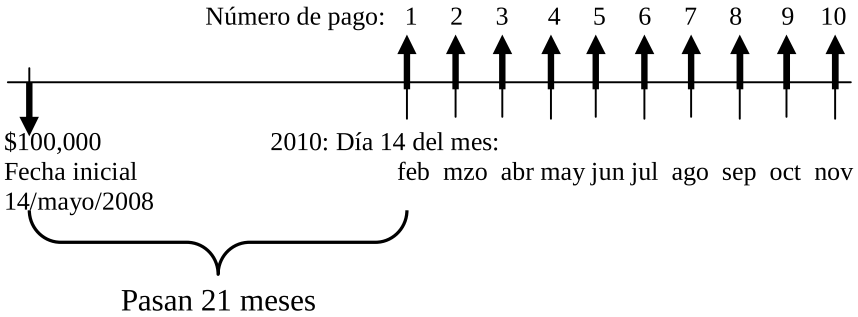
Es más sencillo comprender el ejemplo si se copia en una hoja de cálculo en blanco.

⊞ Copiar un ejemplo

	A	B
1	**Fecha**	
2	9/6/2007	
3	2/9/2007	
4	10/12/2008	
5	**Fórmula**	**Descripción (resultado)**
	=MES(A3)-MES(A2)	Meses transcurridos entre dos fechas del mismo año (3)
6	=(AÑO(A4)-AÑO(A3))*12+MES(A4)-MES(A3)	Meses transcurridos entre dos fechas separadas más de un año (15)

14-may-08
14-feb-10
=(AÑO(C4)-AÑO(C3))*12+MES(C4)-MES(C3)
AÑO(núm_de_serie)

Por lo tanto el diagrama de flujo de caja queda:



La ecuación para calcular el valor presente de pagos anualizados anticipados es:

$$C=R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

Se requiere plantear una ecuación de equivalencia, una opción será la siguiente:

$$\$100,000=R\left[1+\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right](1+i)^{-21}$$

$$\$100,000=R\left[1+\frac{1-\left(1+\frac{0.1752}{12}\right)^{-10+1}}{\frac{0.1752}{12}}\right]\left(1+\frac{0.1752}{12}\right)^{-21}$$

$$R\left[1+\frac{1-\left(1+\frac{0.1752}{12}\right)^{-10+1}}{\frac{0.1752}{12}}\right]\left(1+\frac{0.1752}{12}\right)^{-21}=\$100,000$$

$$R=\frac{\$100,000\left(1+\frac{0.1752}{12}\right)^{21}}{\left[1+\frac{1-\left(1+\frac{0.1752}{12}\right)^{-10+1}}{\frac{0.1752}{12}}\right]}=\frac{\$13,5578.87}{9.376687}=\$14,459.14$$

RESULTADO: Los pagos deben ser de $14,459.14 si se depositan $100,000 M.N el 14/may/2008 y se cobran 10 pagos a partir del 14 de abril de 2010.

LOS SIGUIENTES EJERCICIOS SERÁN REALIZADOS POR LOS ALUMNOS BAJO SUPERVISIÓN DEL PROFESOR:

Ejemplo 5. El valor de contado de una mesa de billar es de $22,000; la cual se puede adquirir a crédito mediante 6 pagos bimestrales; el primero de los cuales pude realizarse 6 meses después de la compra; si el interés es del 4% bimestral ¿Cuál deberá ser el valor de los pagos?

Ejemplo 6. Se está vendiendo un equipo por el cual se deben realizar 18 pagos mensuales de $200 a partir del 1ro de enero del 2010 bajo una tasa del 36% anual capitalizable al mes. Si el equipo se compra el 1ro de agosto de 2009 determine el valor presente o de contado del artículo.

Ejemplo 7. Calcular el valor actual de una renta bimestral de $6,000 durante 10 años si el primer pago bimestral se realiza dentro de 2 años y el interés es de 17% bimestral capitalizable al bimestre.

Actividad 4.5. Anualidades diferidas. Realiza los siguientes ejercicios:

1.- Se obtiene un préstamo por $2,000,000 bajo una tasa de interés del 23.29% anual capitalizable al mes para la compra de una maquinaria, determine cuál es el importe de cada uno de los pagos mensuales requeridos para cubrir la deuda si el plazo para pagar es de 3 años y se empieza a pagar después de:
a) 6 meses
b) 12 meses

2.- Se está vendiendo un equipo por el cual se deben realizar 18 pagos mensuales de $2,000 a partir del 1ro de enero del 2010 bajo una tasa del 36% anual capitalizable al mes. Determine el valor presente o de contado del artículo si el equipo se compra en la fecha:
a) 1ro de marzo de 2009
b) 1ro de mayo de 2009

Entrega tus resultados en forma de PRÁCTICA DE EJERCICIOS, siguiendo las rúbricas indicadas en la dirección:
http://marcelrzm.comxa.com/Rubricas/Rubricas.htm

Puede enviar el documento final por correo electrónico a las siguientes direcciones: marcelrzm@hotmail.com; marcelrzm@hotmail.com; marcelrzm@yahoo.com.mx y marcelrz2002@yahoo.com.mx

Recuerde enviar dicho correo con copia a usted mismo y en asunto colocar “4.5. Anualidades diferidas”.